北京师范大学教材专著出版委员会审定
北京师范大学出版社资助出版

实分析

陆善镇　王昆扬著



北京师范大学出版社

实　分　析

陆善镇　王昆扬　编

北 京 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

实分析 / 陆善镇 王昆扬编.
/ 北京：北京师范大学出版社，1996.12

ISBN 7-303-04377-2/O・198

北京师范大学出版社出版发行
(100875 北京新街口外大街 19 号)
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：850×1168 1/32 印张：6.875 字数：166 千
1997 年 8 月北京第一版 1997 年 8 月北京第一次印刷
印数：1—2 000 册
定价：9.00 元

序　言

80 年代初，北京师范大学数学系硕士研究生的公共基础课 "实分析" 尚无适当教材. 几位老师曾使用过美国的《测度与积分》一书 (R.L.Wheeden & A.Zygmund 著， Measure and Integral, 1977 年版). 这是一本内容详实的好书. 但是深度对于我们显得偏低. 我们认真地比较了当时国内外流行的十来本关于实分析的书籍，觉得它们各有侧重，各有特点，深浅不一. 但都不能适应我们硕士生的基础水平和进一步提高的要求. 为了适应当代数学的发展，为了向研究生提供一本适合他们的基础水平，既介绍现代基础理论，又讲授现代基本技巧，不仅适合函数论专业，也适合其它非函数论专业的研究生的教科书，我们编写了这本《实分析》.

学习这门课程应该具有大学数学系的 "实变函数论", "泛函分析","点集拓扑学" 及 "近世代数 (群论)" 的基础. 这些基础知识可在参考文献 [10] ～ [14] 中找到.

全书共两篇.

第一篇，Lebesgue 积分论，分为两章. 其第一章，抽象的测度和积分，是大学本科实变函数论课程的直接继续和深化. 它以 Euclid 空间上的测度和积分理论为具体模型，把实质抽象出来，推广到一般的集合上. 目的是使学生把已学过的知识提高到新的水平，抓住 Lebesgue 积分理论的实质，在抽象空间上建立和展开 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的理论. 不仅这些知识本身对于各专业的研究生都是必要的，而且这一章能生动地体现由个别到一般，由具体到抽象的认识过程. 通过这一认识深化过程，学生可以充分地体会数学理论的发展规律和领略数学推理的优美技巧. 第二章的

题目是测度与拓扑. 如果说第一章建立的一般理论是从点集的测度构造着眼来推广 Euclid 空间上的测度和积分理论的, 那么第二章则是从空间的拓扑结构与测度理论的协调一致这一角度来拓广这一理论的. 这方面的知识在大学本科不曾涉及. 而现代分析早已突破了 Euclid 空间的经典范畴, 在一般的局部紧的 Hausdorff 空间上研究测度与拓扑的关系, 函数的连续性与可测性之间的关系, 及各种积分性质, 已成为现代分析的最基本内容. 第二章为学生在这方面提供最基本的知识. 它将大学实变函数论课程中涉及拓扑的基本内容推广到局部紧的 Hausdorff 拓扑空间上去. 其中 §6 还介绍了拓扑群上的测度和积分.

第二篇, $\mathbb{R}^n$ 上的实分析, 着眼于 Euclid 空间上现代分析的基本理论和重要技巧的介绍. 这些理论和技巧, 大多直接依赖于 Euclid 空间的具体几何的和拓扑的性质, 而不能被概括在已知的抽象理论中. 学习这些知识, 对于函数论专业的学生固然是必须的, 对于其它专业的学生也有重要意义. 进入这一篇, 我们从抽象回到具体. 学生能再回到第一篇抽象理论的最好的实际模型中. 但却必须学会具体问题具体分析的本领. 第二篇共分五章. 第一章为 "$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分", 中心内容是建立 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 积分的变量替换公式. 后面四章内容的侧重点是介绍 $\mathbb{R}^n$ 上实分析的近代理论和方法, 它们体现了现代分析发展中某些最本质的东西. 第二章 " $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的算子插值" 和第三章 "极大函数", 是这个近代理论中的最重要的内容. 有关它们的应用一直贯穿于后面第四章 "卷积" 和第五章 "Fourier 变换" 之中. 我们安排 Fourier 变换作为第五章的内容, 是因为 Fourier 变换已在数学的许多领域 (如偏微分方程, 函数论, 概率论以及数值分析等) 中扮演了很重要的角色.

本书的第一稿写成于 1986 年, 于 1989 年做了一次大的修改, 1995 年受本校研究生院的资助, 做为重点课程建设项目, 做了进一步的修改. 在近十年中, 两作者一直轮流使用此书稿为教本, 后

来杨大春教授也曾使用过两次．书稿在教学中不断修改．然而，由于编者水平有限，仍难免有缺点和错误，恳切希望其他同志在使用本书时提出宝贵的意见，以便作进一步的修改．

建议课堂讲授的总学时为 72，其中第一篇占 40 学时，第二篇占 32 学时．

作者们对于北京师范大学研究生院、数学系、出版社对本书的编写及出版给予的大力支持表示诚挚的感谢．

编者

1996 年夏季

目　录

第一篇 Lebesgue积分论

在大学本科的“实变函数论”课程中，我们已经学过 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分理论. 在这一理论中，首先在 $\mathbb{R}^n$ 上建立外测度的概念. 外测度概念的基础，是 $\mathbb{R}^n$ 中立方体的“体积”等于它的边长的 n 次方这样一个直观的几何规定. $\mathbb{R}^n$ 的每个子集都有外测度. 空集的外测度是零. 外测度本身是一个非负的广义实值的集函数，具有可列次加性. 建立了外测度之后，就可引出可测集的概念. 满足 Carathéodory 条件的集是可测集. 对于可测集，其外测度叫作测度. 空集及 $\mathbb{R}^n$ 本身都是可测集，它们的测度分别是零和 ∞. 可测集的全体构成这样一个集族，它对于集合的差运算及可列并运算封闭. 有了测度的概念，便可定义可测函数及积分. 进而用所建立的积分论对可测函数及可积函数进行深入的研究. 本篇分两章. 第一章的目的是将上述 Lebesgue 积分理论的实质性内容抽象出来，在一般的集合上建立起测度的概念. 从而把这一理论推广到一般的抽象集合上，使它适用于更广泛的对象，并得到更广泛的应用. 第二章的目的是将 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 积分论中某些涉及拓扑的内容推广到局部紧的 Hausdorff 拓扑空间上.

第一章 抽象的测度和积分

§1. 测度

定义1.1 设 X 是一个集合，$\mathcal{R}$ 是 X 的一些子集构成的非空的族. 若 $\mathcal{R}$ 满足下述条件：

(1) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A - B \in \mathcal{R}$;

(2) $A_n \in \mathcal{R},\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$,

则称 $\mathcal{R}$ 是 X 上的 σ 环. 若 $\mathcal{A}$ 是 X 上的 σ 环使得 $X \in \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的 σ 代数.

很明显，σ 环 $\mathcal{R}$ 必含有空集 $\emptyset$. 且由于可列交运算可用差运算及可列并运算表出：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k - A_n \right).$$

所以 $\mathcal{R}$ 对可列交运算封闭. 但 $\mathcal{R}$ 可以不含有 X, 所以 $\mathcal{R}$ 不必对余运算封闭. 而 σ 代数 $\mathcal{A}$ 必定对余运算封闭.

定义1.2 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数. 把 X 与 $\mathcal{A}$ 合起来叫作可测空间，记作 $(X, \mathcal{A})$.

我们象在实变函数论课程中做过的一样，规定 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 为广义实数系，它比实数系 $\mathbb{R}$ 多两个符号元素 $-\infty, \infty$, 分别读作负无穷和正无穷. 它们本身不是数，然而作为规定，它们可与实数比较大小并参与适当的算术运算. 这里我们只强调指出，规定零与无穷 ($-\infty$ 或 ∞) 相乘的结果是零.

定义1.3 设 $\mathcal{R}$ 是 X 上的 σ 环，φ 是 $\mathcal{R}$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的单值映射 (函数). 如果 $\varphi(\emptyset) = 0$ 且 φ 具有可列可加性，即当 $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$ 且 $A_m \cap A_n = \emptyset (\forall\, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n)$ 时 $\varphi\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ 成立，则称 φ 是 $\mathcal{R}$ 上的 **符号测度**. 不取负值的符号测度叫作 **测度**. 如果 $(X, \mathcal{A})$ 是可测空间，μ 是 $\mathcal{A}$ 上的测度，则称三元序组 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间，$\mathcal{A}$ 的元叫 μ 可测集或简称为可测集.

一个测度空间 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 如果使零测度集的每个子集都可测，就叫作是完全的 (或说 μ 是完全的).

注 一个符号测度 φ 不可能同时取到值 ∞ 和 $-\infty$. 不然的话，设 $\varphi(A)=\infty, \varphi(B)=-\infty$, 则等式 $\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)=\varphi(A)+\varphi(B)$ 不能成立.

定义1.4 设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间， φ 是 $\mathcal{A}$ 上的符号测度. 若 φ 只取有限的值，则称 φ 为 **有限** 的. 若 X 可表为 $\mathcal{A}$ 中可列个集 E_k, $k\in\mathbb{N}$, 的并，使得 $\varphi(E_k)\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, 则称 φ 为 **σ有限** 的.

例 1 设 X 是集合，对于 $A\subset X$, 令

$$\nu(A)=\begin{cases}\overline{\overline{A}}, & \text{若 } A \text{ 是有限集},\\ \infty, & \text{若 } A \text{ 是无穷集}.\end{cases}$$

则 ν 是 2^X 上的测度，常称为 **计数测度**. 其中， $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的势， 2^X 为由 X 的一切子集所组成的集合.

例 2 设 X 是集合，对于 $A\subset X$, 令

$$\mu(A)=\begin{cases}0, & \text{若} A=\emptyset,\\ \infty, & \text{若} A\neq\emptyset.\end{cases}$$

则 μ 是 2^X 上的测度 (这是一种退化的测度).

下面我们讨论一下测度的基本性质.

定理1.1 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度，则当 $A,B\in\mathcal{R}$ 且 $A\subset B$ 时， $\mu(A)\leq\mu(B)$.

证 $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geq\mu(A)$. □

定理1.2 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度， $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{R}$ 的单调增序列，那么

$$\mu(\lim A_n)=\lim \mu(A_n).$$

证 令 $A_0=\emptyset$, $B_n=A_n-A_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, 那么

$$\lim A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,$$

且 $B_m \cap B_n = \emptyset\ (m,n \in \mathbb{N}, m \neq n)$, $B_n \in \mathcal{R}$. 由测度的可列可加性得

$$\mu(\lim A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim \mu(A_n).\square$$

定理1.3 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度，若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{R}$ 中的单调降序列且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

证 令 $B_n = A_1 - A_n$, 用定理 1.2, 得

$$\mu(\lim B_n) = \lim \mu(B_n) = \lim(\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_n).$$

注意到

$$\lim B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) = A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \lim A_n$$

得到

$$\mu(A_1) - \mu(\lim A_n) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_n),$$
$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).\square$$

注 定理 1.3 的条件 $\mu(A_1) < \infty$ 是不可少的. 例如对于 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度 m, 及集列 $\{(n,\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ 有

$$m(\lim(n,\infty)) = 0 < \lim m((n,\infty)) = \infty.$$

定理1.4 设 μ 是 σ 环 $\mathcal{R}$ 上的测度， $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 那么

$$\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n),$$

如果还知道 $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \infty$, 则

$$\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n).$$

证 只要注意

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim \Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Big)$$

以及

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim \Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Big),$$

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset A_n,$$

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n,$$

使用定理 1.1 、 1.2 及 1.3 便可. □

习 题

1. 设 Ω 是可列集, $\mathcal{F}$ 是 Ω 的所有有限子集及它们的余集所成的族. 证明 $\mathcal{F}$ 不是 σ 代数, 然而 $\mathcal{F}$ 对于有限次的集运算 (并, 交, 差, 余) 封闭 (这样的非空的集族叫作代数).
2. 设 μ 是定义在 σ 代数 $\mathcal{A}$ 上的非负的有限可加集函数 (即 $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$). 证明, 若 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个两两不交的集列, 则

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

举出使上式中不等号成立的例子.

3. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是有限测度空间，若 $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ 使 $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$，则视 E_1 与 E_2 为同一个集. 规定 $d(E_1, E_2) = \mu(E_1 \Delta E_2)$ 为 E_1 与 E_2 的距离 $(E_1, E_2 \in \mathcal{A})$. 证明 $(\mathcal{A}, d)$ 是完备的距离空间.

§2. 可测函数，积分

定义2.1 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数， $E \in \mathcal{A}$. 设 f 是定义在 E 上的广义实值函数 (即 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的单值映射). 如果， $\forall\, a \in \mathbb{R}$, 集 $\{x \in E:\ f(x) > a\} \in \mathcal{A}$, 则称 f 是 E 上的 $\mathcal{A}$ 可测函数 (简称为可测函数).

定理2.1 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数， $E \in \mathcal{A}$, 则

(1) E 上的只取有限值的 $\mathcal{A}$ 可测函数全体构成实线性空间.

(2) 若 f 是 E 上的可测函数，则

$$f^+ \triangleq \max(f, 0) \triangleq f \vee 0,$$

$$f^- \triangleq \min(f, 0) \triangleq -(f \wedge 0),$$

$$|f|,\ |f|^p\ (p > 0)$$

皆为 E 上的可测函数，且若 $f(x) \neq 0\ (\forall\, x \in E)$, 则 $\frac{1}{f}$ 亦为 E 上的可测函数，其中 $\triangleq$ 意为定义式.

(3) 若 f_n 是 E 上的可测函数 $(n \in \mathbb{N})$, 则

$$\sup\{f_n:\ n \in \mathbb{N}\},\ \inf\{f_n:\ n \in \mathbb{N}\},\ \overline{\lim}\, f_n,\ \underline{\lim}\, f_n$$

皆为 E 上的可测函数.

(4) 若 f 和 g 在 E 上可测，则 fg 在 E 上可测.

证明甚易，从略.

我们用 χ_E 表示集 E 的特征函数.

定义2.2 设 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的 σ 代数， $E_1,\cdots,E_n$ 是 $\mathcal{A}$ 中 n 个两两不交的集合，使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = X, a_1,\cdots,a_n$ 是 n 个互不相同的实数，函数

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{E_i}(x),\quad x\in X \tag{$*$}$$

叫做简单函数，简言之， X 上只取有限个实数值的可测 ($\mathcal{A}$ 可测) 函数叫作简单函数. 我们把 $(*)$ 叫作简单函数 φ 的标准表示.

定理2.2 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数，则存在一列非负简单函数 $f_n, n\in\mathbb{N}$, 使得在 E 上 $f_n\nearrow f$.

此定理的证明与“实变函数论”课程中学过的一样，从略. 为便于行文，我们在下面将大学“实变函数论”课程简称为《实变》.

定理2.3 (Егоров) 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间， $E\in\mathcal{A}$ 且 $\mu(E)<\infty$. 设 f_n 是 E 上的可测的 μ–a.e. 有限 (即在 E 上去掉一个 μ 测度为零的子集外处处取有限值) 函数 ($n\in\mathbb{N}$). 若 $\{f_n\}$ 在 E 上 μ–a.e. 收敛，那么， $\forall\,\varepsilon>0, \exists A\subset E, A\in\mathcal{A}$, 使 $\mu(E-A)<\varepsilon$ 且 $\{f_n\}$ 在 A 上一致收敛.

证明与《实变》同.

定义2.3 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间， f 和 f_n ($n\in\mathbb{N}$) 是 X 上的 $\mathcal{A}$ 可测函数，若

$$\forall\,\delta>0,\ \lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X:\ |f(x)-f_n(x)|\geq\delta\})=0$$

则说 f_n 依测度 μ 收敛到 f, 记作 $f_n\xrightarrow{\mu} f$.

定理2.4 (F. Riesz) 若 $f_n\xrightarrow{\mu} f$, 则有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ μ–a.e. 收敛到 f.

我们说明，术语“$\mu-a.e$”或简写为“a.e.”表示“依测度 μ 几乎处处”. 说一个与自变量有关的命题 $\mu-a.e.$(或 $a.e.$) 成立，意即在一个 μ 测度为零的集外的每点处该命题均成立.

定理 2.4 的证明同《实变》，略.

在我们这一章的讨论中，测度空间本身不具拓扑结构，无法谈到《实变》中的 Лузин 定理. 在第二章我们讨论拓扑空间上的测度时，在适当的场合我们会看到 Лузин 定理的相应推广.

下面我们来叙述一般测度空间上的 Lebesgue 积分理论.

定义2.4 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间.

(1) 若 φ 是非负的简单函数，有标准表示

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}, \tag{$*$}$$

则称 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)$ 为 φ 在 X 上的积分，记为 $\int_X\varphi\,d\mu$.

(2) 若 f 是 X 上的非负可测函数，则称

$$\sup\left\{\int_X\varphi\,d\mu:\ \varphi\text{ 简单，}0\le\varphi\le f\right\}$$

为 f 在 X 上的积分，记为 $\int_X f\,d\mu$.

(3) 设 f 是 X 上的可测函数. 若 $\int_X f^+\,d\mu$ 与 $\int_X f^-\,d\mu$ 不同时为 ∞, 则令

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f^+\,d\mu-\int_X f^-\,d\mu$$

叫作 f 在 X 上的积分；若此值为有限实数，则说 f 在 X 上可积. 将全体可积函数的集合记作 $L(X,\mathcal{A},\mu)$.

我们清楚地看到，定义 1.1–1.3 已经把《实变》课程中讲过的 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度的本质抽象出来，以这种本质属性为定义建立了一般测度概念. 以此为基础，定义 2.4 与《实变》中对 Lebesgue 积分的定义一模一样 (参阅《实变》). 因此，往下整个 Lebesgue

积分理论的展开就与 $\mathbb{R}^n$ 上的寻常积分论完全一样. 以后我们把《实变》中讲过的 $\mathbb{R}^n$ 上的以正方体体积 — 边长的 n 次方为基础的测度概念及相应理论称为 **寻常**Lebesgue 测度与 **寻常**Lebesgue 积分. 只是这里测度空间没有拓扑结构, 因此, 寻常 Lebesgue 理论中的所有结论, 只要不涉及 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑结构及 $\mathbb{R}^n$ 的测度的具体取值方式, 就统统可以搬到这里来. 我们列举一下这些结论. 不太熟悉这些结果的读者一定要补出它们的证明 (可参阅《实变》).

定理2.5 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间, f,g 是 X 上的可测函数, $\int_X f\,d\mu$, $\int_X g\,d\mu$ 存在. 则

(1) $f \le g \Longrightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$;

(2) $\mu(X)=0 \Longrightarrow \int_X f\,d\mu = 0$;

(3) $f=0$ μ–a.e. $\Longleftrightarrow$ $\int_X |f|\,d\mu = 0$;

定理2.6 $L(X,\mathcal{A},\mu)$ 是实线性空间.

定理2.7 (Levi) 设 $k\in\mathbb{N}$, f_k 可测且 $f_k \longrightarrow f$ $(k\to\infty)$. 则

(1) $L(X,\mathcal{A},\mu) \ni \varphi \le f_k \nearrow f \Longrightarrow \int_X f_k\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu$;

(2) $L(X,\mathcal{A},\mu) \ni \varphi \ge f_k \searrow f \Longrightarrow \int_X f_k\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu$;

定理2.8 (Fatou) 设 $k\in\mathbb{N}$, f_k 可测, 则

(1) $L(X,\mathcal{A},\mu) \ni \varphi \le f_k \Longrightarrow \int_X \varliminf\limits_{k\to\infty} f_k\,d\mu \le \varliminf\limits_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu$;

(2) $L(X,\mathcal{A},\mu) \ni \varphi \ge f_k \Longrightarrow \int_X \varlimsup\limits_{k\to\infty} f_k\,d\mu \ge \varlimsup\limits_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu$.

定理2.9 (Lebesgue) 设 $k\in\mathbb{N}$, f_k 是 $\mathcal{A}$ 可测的且收敛到 f. 若 $|f_k|\le\varphi$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, 且 $\varphi\in L(X,\mathcal{A},\mu)$, 则

$$\int_X f_k\,d\mu \longrightarrow \int_X f\,d\mu,\ (k\to\infty).$$

定理2.10 设 $f\in L(X,\mathcal{A},\mu)$. 那么, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 使得

$\forall A \in \mathcal{A}$, 只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\int_X |f|\chi_A \, d\mu < \varepsilon.$$

注 以后我们把 $\int_X f\chi_A \, d\mu$ 写作 $\int_A f \, d\mu$.

习　题

1. 设 $L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是完全的测度空间，证明：若 f 可测且 $f = g$ μ--a.e., 则 g 也可测. 如果 $L(X, \mathcal{A}, \mu)$ 不完全，此事正确否？(请举例).
2. 证明定理 2.1—2.10, 特别是 2.7 和 2.10.

§3. $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

定义3.1 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间，f 表示 X 上的广义实值 $\mathcal{A}$ 可测函数，$0 < p < \infty$. 定义

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : |f|^p \in L(X, \mathcal{A}, \mu)\},$$
$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X,\mathcal{A},\mu)} = \left\{ \int_X |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p},$$
$$\|f\|_\infty = \inf_{\mu(E)=0} \sup\{|f(x)| : x \in X - E\},$$
$$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

注 根据定理 2.5(3), 我们把 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 中几乎处处相等的函数看成是它的同一个元素. 故可认为 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 的元都是只取有限值的函数.

引理3.1 (Young 不等式) 设 $\varphi \in C_{[0,\infty)}$ 且 $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)$ 严格增，若 $\psi(t)=\varphi^{-1}(t)$, 则

$$\forall\, a,b>0,\ ab \le \int_0^a \varphi(t)\,dt + \int_0^b \psi(t)\,dt.$$

证 无妨认为 $a \ge \varphi^{-1}(b)=\psi(b)$. 做 Riemann–Stieltjes 积分之变量替换：

$$\begin{aligned}\int_0^b \psi(t)\,dt &\overset{t=\varphi(u)}{=} \int_0^{\varphi^{-1}(b)} \psi(\varphi(u))\,d\varphi(u)\\ &= \int_0^{\varphi^{-1}(b)} u\,d\varphi(u) = \varphi^{-1}(b)b - \int_0^{\varphi^{-1}(b)} \varphi(u)\,du.\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi(t)\,dt + \int_0^b \psi(t)\,dt &= \varphi^{-1}(b)b + \int_{\varphi^{-1}(b)}^a \varphi(u)\,du\\ &\ge \varphi^{-1}(b)b + b(a-\varphi^{-1}(b)) = ab\end{aligned}$$

(等式仅当 $a=\varphi^{-1}(b)$ 时成立). □

定理3.2 (Hölder 不等式) 设

$$1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

(将 $\frac{1}{\infty}$ 看作 0). 若 $f \in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $g \in L^{p'}(X,\mathcal{A},\mu)$, 则 $fg \in L(X,\mathcal{A},\mu)$ 且

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

证 先考虑 $1<p<\infty$ 的情形.

取

$$\varphi(t)=t^{p-1}\ (0 \le t < \infty).$$

其反函数为 $\psi(t)=t^{p'-1}$. 从而

$$
\begin{aligned}
|f(x)g(x)| &\le \int_0^{|f(x)|} t^{p-1}\,dt - \int_0^{|g(x)|} t^{p'-1}\,dt \\
&= \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \\
\int_X |fg|\,du &\le \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{p'}^{p'}
\end{aligned}
$$

将上式中 f 换为 $f/\|f\|_p$, g 换为 $g/\|g\|_{p'}$, 注意到 $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$, 就得欲证者.

若 $p=1$, $p'=\infty$, 则显然

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \|g\|_\infty \|f\|_1.\square$$

定理3.3 (Minkowski 不等式) 设 $1\le p\le\infty$, $f,g\in L^p(X\mathcal{A},\mu)$. 则

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证 若 $p=1$ 或 $p=\infty$, 则显然有

$$
\begin{aligned}
&|f+g| \le |f|+|g|, \\
&\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.
\end{aligned}
$$

设 $1<p<\infty$, $p'=\frac{p}{p-1}$, 那么

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \le |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}\cdot|g|$$

用 Hölder 不等式

$$
\begin{aligned}
\int_X |f||f+g|^{p-1}\,d\mu &\le \|f\|_p\cdot\|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}} \\
\int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu &\le \|g\|_p\cdot\|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}}
\end{aligned}
$$

从而

$$\int_X |f+g|^p d\mu \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}}$$

由此推出

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \square$$

定理3.4 设 $1 \le p \le \infty$. $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 依范数 $\|\cdot\|_p$ 为实 Banach 空间.

证 根据定理 3.3 可知，$(L^p, \|\cdot\|_p)$ 是实线性赋范空间. 现证其完备性. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(L^p, \|\cdot\|_p)$ 的基本列.

先处理 $p = \infty$ 的情形. 令

$$E_{n,k} = \{x \in X : |f_n(x) - f_k(x)| > \|f_n - f_k\|_\infty\},\ n, k \in \mathbb{N}.$$

由 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义知 $\mu(E_{n,k}) = 0$, 令 $E = \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}} E_{n,k}$ 则 $\mu(E) = 0$. 在 $X - E$ 上,

$$|f_n(x) - f_k(x)| \le \|f_n - f_k\|_\infty \to 0\ (n, k \to \infty).$$

由此可见，在 E 的余集 E^c 上一致地有

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \hat{=} f(x).$$

无妨认为 f 在 E 上取零值，那么 $f \in L^\infty$ 且

$$\|f - f_n\|_\infty \to 0\ \ (n \to \infty).$$

设 $1 \le p < \infty$, 取子列 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使

$$\|g_k - g_{k+1}\|_p < 2^{-k}\ \ k \in \mathbb{N}.$$

无妨认为 g_k 只取有限值. 令

$$g = |g_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$$

由 Levi 定理及 Minkowski 不等式，得

$$\begin{aligned}\int_X g^p\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n}|g_{k+1}-g_k|\right)^p d\mu\\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n}\|g_{k+1}-g_k\|_p\right)^p\\ &\le (\|g_1\|_p+1)^p < \infty.\end{aligned}$$

可见 g 是 μ-a.e. 有限的，从而

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}-g_k) \widehat{=} f$$

是 μ-a.e. 有限的 (可在 g_n 不收敛的点处补充 f 的定义，使 f 在这些点取值零), 于是

$$|f| \le g \in L^p.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 N 充分大，使当 $m, n \ge N$ 时

$$\|g_m - g_n\|_p < \varepsilon.$$

用 Fatou 引理，令 $n \to \infty$ 得

$$\|g_m - f\|_p \le \varepsilon, \qquad m > N.$$

可见 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k - f\|_p = 0$, 从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0$. □

为了估计 L^p 范数，有必要引入分布函数的概念，设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间，f 是 μ-a.e. 有限的可测函数，我们把

$$\lambda(t) = \mu(\{x \in X:\ f(x) > t\}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

叫作 f 的分布函数，显然，$\lambda(t)$ 是单调降的并且是右连续的 (按拓广的意义，不管 $\lambda(t_0)$ 是否有限，只要 $\lim\limits_{t\to t_0^+}\lambda(t) = \lambda(t_0)$, 就称 λ 在 t_0 右连续).

定理3.5 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间， f 为 μ-a.e. 有限的非负可测函数， λ 是它的分布函数，那么

$$\int_X f\,d\mu = \int_{(0,\infty)} \lambda(t)\,dt$$

(右端为寻常 Lebesgue 积分).

证 把证明分为五个步骤.

(1) 可认为 f 处处取正值

(2) 令 $E_{n,k} = \left\{x \in X:\ \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n}\right\}$, 定义

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}, \quad \text{当} x \in E_{n,k}.$$

显然，

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n,k}$$

是不交并. 如果 $x \in E_{n,k}$, 则因

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k-1} \cup E_{n+1,2k},$$

x 或属 $E_{n+1,2k-1}$, 或属 $E_{n+1,2k}$. 总有

$$0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \to f(x).$$

由 Levi 定理，

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

(3) 用 λ 来表达 f_n 的积分. 我们有

$$\int_X f_n\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_{n,k}} f_n\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^n}\mu(E_{n,k})$$

由于

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{k-1}{2^n}\mu(E_{n,k})=\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{j=k}^{N}\mu(E_{n,j})$$
$$=\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2^n}\mu\Big(\bigcup_{j=k}^{N}E_{n,j}\Big)$$
$$=\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2^n}\mu\Big(\Big\{x\in X:\ \frac{k-1}{2^n}<f(x)\le\frac{N}{2^n}\Big\}\Big),$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^n}\mu(E_{n,k})=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\lambda\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big),$$
$$\int_X f_n\,d\mu=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\lambda\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big)$$

(4) 令 $\varphi_n(t)=\lambda\big(\frac{k}{2^n}\big)$, 当 $t\in\big(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\big]$ $k\in\mathbb{N}$. 那么

$$0\le\varphi_n(t)\le\varphi_{n+1}(t)\le\lambda(t).$$

对于 $t>0$, 存在唯一的 $t_n=\frac{k}{2^n}$, 使 $t\le t_n<t+\frac{1}{2^n}$. 当 $n\to\infty$ 时, $t_n\to t+$. 由于 λ 右连续，所以

$$\varphi_n(t)=\lambda(t_n)\to\lambda(t).$$

我们有

$$\int_X f_n\,d\mu=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\lambda\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]}\varphi_n(t)\,dt$$
$$=\int_{(0,\infty)}\varphi_n(t)\,dt.$$

上式右端为寻常 Lebesgue 积分.

(5)

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} \varphi_n(t)\,dt$$
$$= \int_{(0,\infty)} \lambda(t)\,dt \square$$

推论3.5.1 设 $f \in L^p(X,\mathcal{A},\mu)$, $0 < p < \infty$, λ 为 $|f|$ 的分布函数, 那么

$$\int_X |f|^p\,d\mu = p\int_{(0,\infty)} t^{p-1}\lambda(t)\,dt.$$

证 对于 $t \geq 0$,

$$\{x \in X:\ |f|^p > t\} = \{x \in X:\ |f| > t^{1/p}\}$$

故由定理 3.5,

$$\int_X |f|^p\,d\mu = \int_{(0,\infty)} \lambda\left(t^{1/p}\right)dt.$$

右端经广义 Riemann 积分的变量替换 $t = s^p$ 便得所欲证者. □

例 1 设 D 是不空的集合, f 为 D 上的实值函数, 设 $0 < p < \infty$, 定义

$$\ell_p(f) = \Big\{\sum_{x\in D}|f(x)|^p\Big\}^{1/p}$$
$$\hat{=} \sup\Big\{\Big[\sum_{x\in F}|f(x)|^p\Big]^{1/p}:\ F \text{ 为 } D \text{ 的有限子集}\Big\}$$

设 $\mathcal{A} = 2^D$,μ 是 $\mathcal{A}$ 上的计数测度, 那么容易看出

$$L^p(D,\mathcal{A},\mu) = \{f : \ell_p(f) < \infty\} \hat{=} \ell^p(D),$$

并且

$$\|f\|_p = \ell_p(f).$$

我们指出，如果 $\ell_p(f) < \infty$, 那么存在一个可数集 $M \subset D$, 使得当 $x \in D - M$ 时 $f(x) = 0$, 此时,

$$\ell_p(f) = \Big(\sum_{x \in M} |f(x)|^p\Big)^{1/p}.$$

因此，当 $1 \le p < \infty$ 时， $\ell^p(D)$ 依范 ℓ_p 成一 Banach 空间. 当 $D = \mathbb{N}$ 时，简写 $\ell^p(\mathbb{N})$ 为 ℓ^p, 已为众所周知 (见任何一本初等 "泛函分析" 课本).

在 L^p 理论中， $p = 2$ 的情形有特殊的地位，下面对 $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ 做些讨论.

在实 $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上可引入内积：

$$\langle f, g\rangle = \int_X fg\, d\mu.$$

依此内积， $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ 成为 **Hilbert空间**. 我们一般地对 Hilbert 空间做一些讨论.

定理3.6 设 H 是 Hilbert 空间， E 是 H 的一个标准正交系. 下面五条彼此等价：

(1) E 是完全的 (complete), 即 $x \perp E \Longrightarrow x = 0$;

(2) $\forall\, x \in H$, $\exists$ 可数集 $I \subset E$ 使 $x \perp (E - I)$ 且

$$x = \sum_{z \in I} \langle x, z\rangle z.$$

(3) $\forall\, x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{z \in E} |\langle x, z\rangle|^2$ (Parseval 等式),

(4) $\forall\, x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{z \in E} \langle x, z\rangle\langle z, y\rangle$ (Parseval 等式).

(5) H 的包含 E 的最小子空间在 H 中稠密.

证 设 (1) 成立， $x \in H$. 对于 E 中任意有限个元 $z_1, \cdots, z_k$, 记

$$u = \sum_{j=1}^{k} \langle x, z_j\rangle z_j$$

那么

$$0 \le \langle x-u, x-u\rangle = \|x\|^2 + \|u\|^2 - \langle x,u\rangle - \langle u,x\rangle.$$

注意到

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |\langle x, z_j\rangle|^2 = \langle x,u\rangle,$$

得

$$\sum_{j=1}^{k} |\langle x, z_j\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

由此可见， E 中与 x 不正交的元至多有可数个 (见习题 8), 记之为 $\{z_n\}$. 那么

$$y \widehat{=} \sum_n \langle x, z_n\rangle z_n \in H$$

且 $x-y \perp E$. 从而 $x=y$, 得 (2).

设 (2) 成立， $\forall\, x,y\in H$, E 中有一序列 $\{z_n\}$ 使

$$x = \sum \langle x, z_n\rangle z_n, \quad y = \sum \langle y, z_n\rangle z_n.$$

记 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\langle x, z_k\rangle$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\langle y, z_k\rangle z_k$. 那么 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$, 从而

$$\begin{aligned}
&|\langle x,y\rangle - \langle x_n,y_n\rangle| = |\langle x-x_n, y\rangle + \langle x_n, y-y_n\rangle| \\
&\le \|x-x_n\|\,\|y\| + \|x_n\|\,\|y-y_n\| \\
&\le \|x-x_n\|(\|y\| + \|y-y_n\|) + \|y-y_n\|\|x\| \to 0, \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

注意到

$$\langle x_n, y_n\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, z_k\rangle \overline{\langle y, z_k\rangle},$$

就得到 (4), 而 (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1).

证得 (1),(2),(3),(4) 彼此等价.

最后，显然，(2)$\Longrightarrow$(5), 反过来，设 (5) 成立，设 $x \perp E$, 那么 $x \perp \operatorname{span} E$, 存在 $y_n \in \operatorname{span} E$, 使 $\|y_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 于是

$$\langle x, x - y_n \rangle = \|x\|^2 \leq \|x\| \cdot \|x - y_n\| \to 0$$

从而 $x = 0$, 证得 (1). □

定理3.7 Hilbert 空间中任何两个完全的标准正交系具有同样的势 (基数).

证 设 A, B 是 Hilbert 空间 H 的两个完全的标准正交系.

若 A 是有限集，则 A 是 H 的 Hamel 基，而 B 是线性无关组，故 $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$, B 也是 Hamel 基，所以 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

设 A, B 皆为无穷集.

$\forall\, a \in A$, 定义 $B_a = \{b \in B : \langle a, b \rangle \neq 0\}$. 那么 $\overline{\overline{B_a}} \leq \aleph_0$. 对于 $b \in B$, 由于

$$1 = \|b\|^2 = \sum_{a \in A} |\langle b, a \rangle|^2$$

所以必有某 $a \in A$, 使 $\langle b, a \rangle \neq 0$, 即 $b \in B_a$. 于是

$$B = \bigcup_{a \in A} B_a.$$

由此得 $\overline{\overline{B}} \leq \aleph_0 \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, 交换 A, B 的位置，得 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. □

定理3.8 设 H 是 Hilbert 空间，H 必有完全标准正交系.

证 显然，H 的每个单位元构成一个单元素的标准正交系. 把 H 的一切标准正交系都收集在一起，作成一族 $\mathcal{F}$. 在 $\mathcal{F}$ 上定义偏序：若 $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, 则规定 $A \leq B$. 在这个偏序之下，每个链 (全序子集) 都有上界 (若 $\mathcal{D} = \{A\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的全序子集，令 $M = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{D}} A$, 则 M 是 $\mathcal{D}$ 的上界). 用 Zorn 引理，得知 $\mathcal{F}$ 有极大元，记为 M. M 必是完全的. 因若不然，由定理 4.5(1), 存在 $x \in H$,

$x \neq 0$ 且 $x \perp M$. 将 $\frac{x}{\|x\|}$ 并入 M 将成为 $\mathcal{F}$ 的一元，它大于 M, 与 M 为极大元矛盾. □

定义3.2 设 H 是 Hilbert 空间， H 的完全标准正交系的势叫作 H 的 **正交维数** 简称 **维数**.

定理3.9 设 H 是 Hilbert 空间，那么，存在一个集合 D, 使 H 与 $\ell^2(D)$ 等范同构.

证 取 D 为 H 的完全标准正交系.

对应于每个 $x \in H$, 定义一个函数 f_x :

$$f_x(z) = \langle x, z \rangle, \quad \forall\, z \in D.$$

显然， $f_x \in \ell^2(D)$(见例 1), 且

$$\begin{aligned}\ell_2(f_x) &= \Big\{ \sum_{z \in D} |f_x(z)|^2 \Big\}^{1/2} \\ &= \Big\{ \sum_{z \in D} |\langle x, z \rangle|^2 \Big\}^{1/2}\end{aligned}$$

映射 T: $x \mapsto f_x$ 是线性的，且由定理 3.6(4)

$$\begin{aligned}&\forall\, x, y \in H, \\ &\langle x, y \rangle = \sum_{z \in D} \langle x, z \rangle \overline{\langle y, z \rangle} \\ &\qquad = \sum_{z \in D} f_x(z) \cdot \overline{f_y(z)} \widehat{=} \langle f_x, f_y \rangle.\end{aligned}$$

可见映射 T 是保持内积的.

设 $f \in \ell^2(D)$, $\ell_2(f) = \big(\sum_{z \in D} |f(z)|^2 \big)^{1/2}$. 定义

$$x = \sum_{z \in D} f(z) z.$$

注意，这个级数是依 H 范收敛的，定义是合理的．那么 $x \in H$ 且 $\langle x, z\rangle = f(z)$, 可见 $T(x) = f$, 从而，映射 T 是满射．当然， T 是单射．我们证明了在映射 T 之下， H 与 $\ell^2(D)$ 同构等范． □

定理3.10 设 D 是不空的集合． $\ell^2(D)$ 上的有界线性泛函 L 可表为内积： ∃ 唯一的 $g \in \ell^2(D)$ 使得 $\|L\| = \ell_2(g)$ 且

$$L(f) = \langle f, g\rangle, \quad \forall\, f \in \ell^2(D).$$

证 设 $\xi \in D$, 令

$$\chi_\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x = \xi, \\ 0 & \text{当 } x \neq \xi,\ x \in D. \end{cases}$$

那么 $\chi_\xi \in \ell^2(D)$. 记 $L(\chi_\xi) = a_\xi$. 任取 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ 及两两不同的 $\xi_1, \cdots, \xi_k \in D$. 设

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{\xi_i}$$

那么

$$|L(f)| = \left|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot a_{\xi_j}\right| \leq \|L\| \cdot \ell_2(f)$$
$$= \|L\| \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

倘取 $\alpha_j = \overline{a}_{\xi_j}$, 则见到

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |a_{\xi_j}|^2\right)^{1/2} \leq \|L\|.$$

因此

$$\left\{\sum_{\xi \in D} |L(\chi_\xi)|^2\right\}^{1/2} \leq \|L\|.$$

定义

$$g(\xi) = \overline{L(\chi_\xi)}, \quad \xi \in D.$$

那么 $g \in \ell^2(D)$ 且 $\ell_2(g) \le \|L\|$. 对于 $f \in \ell^2(D)$, 依 $\ell^2(D)$ 范有

$$f = \sum_{\xi \in D} f(\xi)\chi_\xi.$$

因此

$$L(f) = \sum_{\xi \in D} f(\xi)L(\chi_\xi) = \sum_{\xi \in D} f(\xi)\overline{g(\xi)}.$$

右端依定义恰为 $\langle f, g\rangle$. 可见

$$L(f) = \langle f, g\rangle.$$

用 Hölder 不等式,

$$|L(f)| \le \ell_2(f) \cdot \ell_2(g).$$

从而 $\|L\| \le \ell_2(g)$, 所以 $\|L\| = \ell_2(g)$.□

由定理 3.9 和定理 3.10 得

推论3.10.1 设 H 为 Hilbert 空间, L 是 H 上的有界线性泛函. 则存在唯一的 $g \in H$, 使得

$$\forall\, f \in H, \quad L(f) = \langle f, g\rangle.$$

定理 3.10 以及推论 3.10.1 都叫作表示定理, 冠以 F.Riesz 的姓氏.

习 题

1. 设 $0 < p < 1$. 在 $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上定义二元函数 d:

$$d(f, g) = \int_X |f - g|^p \, d\mu, \quad f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

证明 (L^p, d) 是完备的距离空间.

2. 设 $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. 证明

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0:\ \mu(\{x \in X:\ |f(x)| > \alpha\}) = 0\}.$$

3. 若 $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 对一切 $p \in [1, \infty)$ 成立，则

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

4. 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的寻常 Lebesgue 测度，$p, q \in (0, \infty)$ 且 $p \neq q$. 请找一个 $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus L^q(\mathbb{R}^n)$.

5. Vitali 收敛定理：设 $p \in [1, \infty)$, $\{f_n\} \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 且 $f_n \longrightarrow f$, f μ–a.e. 有限，如果

   (1) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, 使

$$\int_{X-A_\varepsilon} |f_n|^p\, d\mu < \varepsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

   (2) 关于 n 一致成立着

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |f_n|^p\, d\mu = 0$$

那么 $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

6. 作为 Hilbert 空间，$L^2(\mathbb{R}^n)$ 的正交维数是 $\aleph_0$.

7. 设 Hilbert 空间 H 的正交维数为 d, 证明 H 可分的充要条件是 $d \leq \aleph_0$.

8. 设 E 是由某些正数组成的集合. 若 $\overline{\overline{E}} > \aleph_0$. 则从 E 中可取出可列子集 $\{a_n:\ n \in \mathbb{N}\}$, 使

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \infty.$$

§4. 符号测度

这一节讨论符号测度的分解及其与测度的关系，引入绝对连续与奇异的概念.

(一) 符号测度的分解

定义4.1 设 φ 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度. 如果 $P\in\mathcal{A}$ 满足下述条件：

$$\forall\, E\in\mathcal{A},\quad \varphi(P\cap E)\geq 0,$$

则称 P 为 φ 的正集. $-\varphi$ 的 **正集** 叫作 φ 的 **负集**. 既正又负的可测集叫作 **零集**.

引理4.1 设 φ 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度. 那么

(1) 若 $E,F\in\mathcal{A}$, 且 $\varphi(E)>-\infty$, $F\subset E$, 则

$$\varphi(F)>-\infty;$$

(2) 若 $A_n\in\mathcal{A}$, $A_n\nearrow A$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi(A);$$

(3) 若 $B_n\in\mathcal{A}$, $B_n\downarrow B$ 且 $|\varphi(B_1)|<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(B_n)=\varphi(B).$$

证 结论 (1) 由等式 $\varphi(E)=\varphi(F)+\varphi(E-F)$ 推出，结论 (2), (3) 的证明分别与定理 1.2 及 1.3 同. □

定理4.2 设 φ 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度， $E\in\mathcal{A}$. 若 $\varphi(E)>0$, 则存在集 $S\in\mathcal{A}$ 使得 $S\subset E,\varphi(S)>0$, 且 S 是 φ 的正集.

证 由引理 4.1(1) 知， E 的每个可测子集 F 皆使 $\varphi(F)>-\infty$. 若 E 不是正集，则存在自然数

$$n_1=\min\left\{k\in\mathbb{N}:\ \exists A\in\mathcal{A},\ A\subset E,\ \varphi(A)<-\frac{1}{k}\right\}$$

以及 $F_1\in\mathcal{A},\ F_1\subset E$ 使 $\varphi(F_1)<-\frac{1}{n_1}$. 那么

$$\varphi(F_1)\in\left(-\infty,-\frac{1}{n_1}\right)$$

且

$$\varphi(E-F_1)=\varphi(E)-\varphi(F_1)\geq\varphi(E)+\frac{1}{n_1}>0.$$

若 $E-F_1$ 是正集，则定理的结论已成立. 若 $E-F_1$ 不是正集，则存在自然数

$$n_2=\min\left\{k\in\mathbb{N}:\ \exists A\in\mathcal{A},\ A\subset E-F_1,\ \varphi(A)<-\frac{1}{k}\right\}$$

以及 $F_2\in\mathcal{A}, F_2\subset E-F_1$, 使 $-\infty<\varphi(F_2)<-\frac{1}{n_2}$. 那么 $n_2\geq n_1$ 且

$$\varphi(E-F_1-F_2)>\varphi(E)+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}>0.$$

若 $E-F_1-F_2$ 是正集，则定理的结论已成立；若 $E-F_1-F_2$ 不是正集，则可以对 $E-F_1-F_2$ 重复上述步骤.

继续这样做下去，将有两种结果，一是有限次以后，得到一个正集

$$E-\bigcup_{j=1}^{m}F_j=S,$$

使 $\varphi(S) > 0$, 从而证实了定理的结论；另一种结果是，这个步骤永无休止. 那么就得到一列两两不交的可测集 F_k, $k \in \mathbb{N}$, $F_k \subset E$, 及单调增的自然数的子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使

$$n_k = \min\Big\{j \in \mathbb{N}:\ \exists A \in \mathcal{A},\ A \subset E - \bigcup_{i=1}^{k-1} F_i,$$

$$\varphi\Big(E - \bigcup_{i=1}^{k-1} F_i\Big) < -\frac{1}{j}\Big\},$$

$$-\infty < \varphi(F_k) < -\frac{1}{n_k},$$

其中，规定 $\bigcup_{i=1}^{0} F_i = \emptyset$. 令 $S = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. 那么

$$\varphi(S) \geq \varphi(E) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} > 0.$$

由于

$$-\infty < \varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(F_k) \leq -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k},$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$. 且由 n_k 的定义知， $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $A \subset S$, 皆满足

$$\varphi(A) \geq -\frac{1}{n_k - 1},\quad 当 n_k \geq 2.$$

可见 $\varphi(A) \geq 0$. 这就是说， S 是正集. □

定理4.3 (Hahn) 设 φ 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的符号测度. 那么，存在 $P \in \mathcal{A}$, 使得 P 为 φ 的正集且 $P^c = X - P$ 为 φ 的负集. 此种分解叫作 Hahn 分解 (简记作 (P, P^c)), 它依下述意义是唯一的：若存在另一个 Hahn 分解 (P_1, P_1^c), 那么对于任何 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\varphi(P_1 \cap A) = \varphi(P \cap A),\ \varphi(P_1^c \cap A) = \varphi(P^c \cap A).$$

证 无妨认为 φ 不取 $+\infty$ (即 $\forall\, A \in \mathcal{A},\ \varphi(A) < \infty$). 令

$$\alpha = \sup\{\varphi(A):\ A \text{ 为正集}\}$$

并取一个正集序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(A_k) = \alpha.$$

令

$$P_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

则显然 P_n 是正集, 且

$$\alpha \geq \varphi(P_{n+1}) \geq \varphi(P_n) \geq \varphi(A_n)$$

令

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

由引理 4.1(2) 知

$$\varphi(P) = \lim_{n\to\infty} \varphi(P_n) = \alpha < \infty.$$

假若 P^c 不是负集, 则存在 $E \in \mathcal{A}$, $E \subset P^c$, 使得 $\varphi(E) > 0$. 用定理 4.2, 知存在 $S \in \mathcal{A}$, $S \subset E$, S 为正集且 $\varphi(S) > 0$. 那么 $S \cup P$ 为正集且

$$\varphi(S \cup P) = \varphi(S) + \varphi(P) > \alpha.$$

这与 α 的定义不合. 可见 P^c 为负集.

若另有正集 P_1 及负集 P_1^c, 那么 $P\Delta P_1 = (P \cap P_1^c) \cup (P_1 \cap P^c)$ 必为零集, $P^c \Delta P_1^c$ 亦为零集. 由此证得 Hahn 分解的唯一性. □

定义4.2 设 φ 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度. $\forall E \in \mathcal{A}$,

$$\varphi^+(E) = \sup_{A\in\mathcal{A}} \varphi(A\cap E),$$
$$\varphi^-(E) = \sup_{A\in\mathcal{A}} \{-\varphi(A\cap E)\},$$
$$|\varphi|(E) = \varphi^+(E) + \varphi^-(E)$$

分别叫作 φ 在 E 上的 **正,负变差** 及 **全变差**.

定理4.4 设 φ 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度. 若 P, P^c 分别为 φ 的正集与负集, 则 $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\varphi^+(E) = \varphi(E\cap P),$$
$$\varphi^-(E) = -\varphi(E\cap P^c).$$

证 对于 E 的任何可测子集 F, 有

$$\varphi(F) = \varphi(F\cap P) + \varphi(F\cap P^c) \le \varphi(F\cap P) \le \varphi(E\cap P),$$
$$\varphi(F) \ge \varphi(F\cap P^c) \ge \varphi(E\cap P^c).\square$$

定理4.5 (Jordan) 设 φ 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度, 那么

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-.$$

证 据定理 4.3, 设 (P,P^c) 是 Hahn 分解. 用定理 4.4, $\forall E \in \mathcal{A}$

$$\varphi(E) = \varphi(E\cap P) + \varphi(E\cap P^c) = \varphi^+(E) - \varphi^-(E).\square$$

Jordan 分解定理告诉我们, 符号测度必为两个测度 (它的正变差与负变差) 的差.

若 $f \in L(X,\mathcal{A},|\varphi|)$, 则定义

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\varphi^+ - \int_X f\,d\varphi^-.$$

(二) 绝对连续与奇异的概念

定义4.3 设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间， μ 和 ν 是符号测度. 如果 $\forall\, E\in\mathcal{A}$, $|\mu|(E)=0\Longrightarrow\nu(E)=0$, 则说 ν 关于 μ 绝对连续，记作 $\nu\ll\mu$.

例 1 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间， $f\in L(X,\mathcal{A},\mu)$. 令

$$\nu(A)=\int_A f\,d\mu,\ \ \forall\, A\in\mathcal{A}$$

那么 $\nu\ll\mu$.

定义4.4 设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间， μ 和 ν 是符号测度. 如果存在 $A\in\mathcal{A}$, 使

$$|\mu|(A)=|\nu|(A^c)=0$$

则说 μ 与 ν 是相互奇异的 (也说 μ 关于 ν 奇异), 记作 $\mu\perp\nu$.

例 2 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间， ψ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度, $E\in\mathcal{A}$, $\mu(E)=0$. 定义

$$\varphi(A)=\psi(A\cap E),\ \ \forall\, A\in\mathcal{A}.$$

那么 $\varphi\perp\mu$.

定理4.6 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间， ν 是 $(X,\mathcal{A},)$ 上的有限符号测度. 那么 $\nu\ll\mu$ 的充要条件是： $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0,\forall\, A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)<\delta\Longrightarrow|\nu(A)|<\varepsilon$.

证 充分性是明显的.

假设条件不成立. 也就是说， $\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall\,\delta>0$, $\exists\, A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)<\delta$. 但 $|\nu(A)|\ge\varepsilon_0$. 那么， $\exists\, A_k\in\mathcal{A}$, $\mu(A_k)<2^{-k}$ 且 $|\nu(A_k)|\ge\varepsilon_0$ $(k\in\mathbb{N})$. 令 $A=\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k$, 那么

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\ \mu(A)\le\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=k}^{\infty}2^{-n}=2^{-k+1}.$$

从而 $\mu(A)=0$.

由于 ν 是有限的，所以

$$|\nu|(A)=|\nu|\left(\varlimsup_{k\to\infty} A_k\right)\geq \varlimsup_{k\to\infty}|\nu|(A_k)\geq \varepsilon_0.$$

这表明 ν 不是绝对连续的，从而证得条件的必要性. □

例 3 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的寻常 Lebesgue 测度，定义 ν, 在每个 μ 零集上 ν 取零值，在每个 μ 正测度集上 ν 取 ∞ 值. 那么 ν 是测度，$\nu\ll\mu$, 但显然不满足定理 4.6 所述的条件. 这说明定理 4.6 中去掉 ν 有限的限制，结论中条件的必要性不成立.

定理4.7 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是测度空间，ν 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度. 那么 $\nu\perp\mu$ 的充要条件是：$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,E\in\mathcal{A}$, $\mu(E)<\varepsilon$ 且 $|\nu|(E^c)<\varepsilon$.

证 必要性是明显的.

设所述条件成立. 那么，$\exists\,E_k\in\mathcal{A}$, 使

$$\mu(E_k)<2^{-k},\quad |\nu|(E_k^c)<2^{-k}.$$

令 $Z=\varlimsup_{k\to\infty} E_k$. 那么 $\mu(Z)=0$ 且

$$Z^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c,$$

$$|\nu|(Z^c)=\lim_{n\to\infty}|\nu|\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c\right)\leq \varlimsup_{n\to\infty}|\nu|(E_n^c)=0.$$

可见 $\nu\perp\mu$.□

习 题

1. 设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间，μ,ν 是它上面的两个符号测度. 证明：

(1) $\mu \ll \nu$ 且 $\mu \perp \nu$ 的充要条件是 $\mu = 0$;

(2) $\mu \ll \nu \iff \mu^+ \ll \nu, \mu^- \ll \nu \iff |\mu| \ll \nu$;

(3) 集合 $\{\varphi: \varphi$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的有限符号测度且 $\varphi \ll \nu\}$ 与集合 $\{\varphi: \varphi$ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的有限符号测度且 $\varphi \perp \nu\}$ 都是实线性空间.

2. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是有限测度空间, $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一列有限测度, 且 $\nu_n \ll \mu$. 证明: 如果对于每个 $E \in \mathcal{A}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(E) = \nu(E)$ 都是有限的, 那么

   (1) 诸 ν_n 关于 μ 一致绝对连续, 即

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \nu_n(E) = 0$$

   关于 $n \in \mathbb{N}$ 一致成立.

   (2) ν 是有限测度.

   提示: 考虑距离空间 $(\mathcal{A}, d)$, 其定义如 §1 习题 3, , 证明 ν_n 在 $(\mathcal{A}, d)$ 上连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 考虑集族

$$\mathcal{A}_{m,n} = \{E \in \mathcal{A}: |\nu_n(E) - \nu_m(E)| \le \varepsilon\},\ m, n \in \mathbb{N}$$

   及

$$\mathcal{A}_p = \bigcap_{m,n \ge p} \mathcal{A}_{m,n},\ \ n \in \mathbb{N},$$

   用 Baire 纲定理.

3. 设 $(X, \mathcal{A})$ 是可测空间, $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列非零有限符号测度, 使得对于每个 $E \in \mathcal{A}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(E) = \nu(E)$ 存在有限. 证明 ν 是有限符号测度.

   提示: 令 $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n(E)}{|\nu_n|(X)} 2^{-n}$. 用习题 2. 习题 2 的结论可推广于有限符号测度.

4. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ 是测度空间. 令 $\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n$, 则 μ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度.

5. 举例说明，存在符号测度 ν 及可测集 E, 使 $\nu(E)=0$ 但 E 不是零集.

6. 设 ν 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的符号测度，证明： $\forall\, E\in\mathcal{A}$,

$$|\nu|(E)=\sup\Big\{\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)|:\ E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k,\ E_k\in\mathcal{A},\\ \text{当}k\neq j\ \text{时},\ E_k\cap E_j=\emptyset;\ n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

7. 设 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的有限符号测度，证明：

$$\forall\, E\in\mathcal{A},\ |\mu|(E)=\sup\left\{\left|\int_E f d\mu\right|:\ f\in L(X,\mathcal{A},|\mu|),\ |f|\le 1\right\}.$$

§5. Radon-Nikodym 定理

设 $(X,\mathcal{A})$ 是可测空间， φ 是 $\mathcal{A}$ 上的符号测度. 由 §4 知，$\varphi=\varphi^+-\varphi^-$. 其中 φ^+ 与 φ^- 是测度且至少有一个是有限的. 显然，(见定义 1.4), 命题 "φ 是有限的" 等价于 "φ^+,φ^- 都是有限的"; "φ 是 σ 有限的" 等价于 "φ^+,φ^- 都是 σ 有限的".

引理5.1 设 μ 和 ν 都是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的有限测度. 若 $\nu\ll\mu$, 则存在一个 $\mathcal{A}$ 可测函数 g, 使 $g(X)\subset[0,1)$ 且 $\forall\, f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)$

$$\int_X f\,d\nu=\int_X fg\,d\nu+\int_X fg\,d\mu.$$

证 对于 $f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)$ 定义

$$L(f)=\int_X f\,d\nu$$

那么

$$|L(f)| \leq \left(\int_X |f|^2 \, d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\nu(X)} \leq \sqrt{\nu(X)} \|f\|_{L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)}.$$

可见， L 是 $L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)$ 上的有界线性泛函．那么由表示定理 (推论 3.10.1), 存在 $h \in L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)$ 使得 $\forall f \in L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)$

$$L(f) = \int_X fh \, d(\mu+\nu).$$

令 $A = \{x \in X : h(x) < 0\}$, 那么

$$0 \leq L(\chi_A) = \nu(A) = \int_A h \, d(\mu+\nu).$$

由此可见 $(\mu+\nu)(A) = 0$.

令 $E = \{x \in X : h(x) \geq 1\}$. 因 $\chi_E \in L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)$, 故

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(E) \leq \int_X \chi_E h \, d\mu &= L(\chi_E) - \int_X \chi_E h \, d\nu \\ &= \int_X \chi_E (1-h) \, d\nu \leq 0. \end{aligned}$$

可见 $\mu(E) = 0$. 由于 $\nu \ll \mu$, 所以 $\nu(E) = 0$.

令 $g = h\chi_{(E \cup A)^c}$, 则 $g(X) \subset [0,1)$ 且 $\forall f \in L^2(X,\mathcal{A},\mu+\nu)$

$$\int_X f \, d\nu = \int_X fh \, d(\mu+\nu) = \int_X fg \, d(\mu+\nu). \square$$

定理5.2 (Radon-Nikodym) 设 $\mu.\nu$ 都是可测空间 $(X,\mathcal{A})$ 上的有限测度. 若 $\nu \ll \mu$, 则存在非负函数 $f_0 \in L(X,\mathcal{A},\mu)$ 使得对于一切非负可测函数 f

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f f_0 \, d\mu.$$

特别地，$\forall A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu$$

证 设 g 是如引理 5.1 所述的函数. 如果 f 是有界的非负可测函数，则 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1+g+\cdots+g^{n-1})f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu+\nu).$$

用引理 5.1, 得

$$\int_X (1+g+\cdots+g^{n-1})f(1-g)\, d\nu = \int_X (1+g+\cdots+g^{n-1})fg\, d\mu$$

即

$$\int_X (1-g^n)f\, d\nu = \int_X \frac{1-g^n}{1-g} gf\, d\mu$$

令 $n \to \infty$, 用 Levi 定理，得

$$\int_X f\, d\nu = \int_X \frac{g}{1-g} f\, d\mu$$

代入 $f=1$, 知 $\frac{g}{1-g} \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$. 令 $f_0 = \frac{g}{1-g}$. 得

$$\int_X f\, d\nu = \int_X f f_0\, d\mu. \square$$

定理5.3 (Radon-Nikodym 定理) 设 μ, ν 是可测空间 $(X, \mathcal{A})$ 上的 σ 有限测度. 若 $\nu \ll \mu$, 则存在唯一的 (按 μ–a.e. 意义) 有限值非负 $\mathcal{A}$ 可测函数 f_0, 使

(1) 对于一切非负可测函数 f 及一切 $f \in L(X, \mathcal{A}, \nu)$, $\int_X f\, d\nu = \int_X f f_0\, d\mu$;

(2) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \int_A f_0\, d\mu$.

证 由于μ, ν是σ有限的,所以X可分解为一个两两不交的可测集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\mu(E_n) < \infty$, $\nu(E_n) < \infty$. 定义 μ_n, ν_n $(n \in \mathbb{N})$:

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n),\ \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n)$$

那么 μ_n, ν_n 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的有限测度，且 $\nu_n \ll \mu_n$. 对 μ_n, ν_n 用定理 5.2, 知有非负有限值可测函数 f_n, 使得对于一切非负可测函数 f,

$$\int_X f\,d\nu_n = \int_X f f_n\,d\mu_n$$

令 $f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \chi_{E_n}$, 易见， f_0 是非负有限值可测函数. 用 Levi 定理，得知，对于非负可测函数 f, 成立着

$$\int_X f\,d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_n}\,d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f\,d\nu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f f_n\,d\mu_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f f_n \chi_{E_n}\,d\mu = \int_X f f_0\,d\mu.$$

由此推出结论 (1), 于式中代于 $f = \chi_A$ 就得到结论 (2).

f_0 的唯一性是明显的. □

定义5.1 定理 5.3 中的函数 f_0 叫作 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数，记作 $\frac{d\nu}{d\mu}$, 亦常用记号

$$d\nu = f_0\,d\mu \quad 及 \nu = f_0\mu$$

表示这一关系.

注 有的书上在 Radon–Nikodym 定理及 Radon–Nikodym 导数的名称前面也冠上 Lebesgue.

对于符号测度 φ, 在 §4 曾定义过

$$\forall f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|), \int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\varphi^+ - \int_X f\,d\varphi^-.$$

用 R–N 定理及 Hahn 分解定理，可推出关于符号测度的相应结果.

定理5.4 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ 有限测度空间， φ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 若 $\varphi \ll \mu$, 则存在只取有限值的可测函数 f_0, 使得

(1) $\forall\, f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$, $\int_X f\, d\varphi = \int_X f f_0\, d\mu$;

(2) $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $\varphi(A) = \int_A f_0\, d\mu$;

(3) $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $|\varphi|(A) = \int_A |f_0|\, d\mu$,

且这样的 f_0 在 μ−a.e. 意义下是唯一的.

证 由 Hahn 分解定理，及定理 4.4, 知有 $P \in \mathcal{A}$, 使 $\forall\, E \in \mathcal{A}$,

$$\varphi^+(E) = \varphi(E \cap P),\quad \varphi^-(E) = -\varphi(E \cap P^c).$$

定义

$$\mathcal{A} \cap P = \{E \cap P:\ E \in \mathcal{A}\},$$
$$\mathcal{A} \cap P^c = \{E \cap P^c:\ E \in \mathcal{A}\}.$$

分别在 $(P, \mathcal{A} \cap P, \mu)$ 和 $(P^c, \mathcal{A} \cap P^c, \mu)$ 这两个 σ 有限测度空间上对 $\varphi^+ \ll \mu$ 和 $\varphi^- \ll \mu$ 使用定理 5.3, 知有 P 上的有限值可测函数 f_0^+ 和 P^c 上的有限值可测函数 f_0^- 使

$$\forall\, f \in L(P, \mathcal{A} \cap P, \varphi^+),\ \int_P f\, d\varphi^+ = \int_P f f_0^+\, d\mu, \tag{a}$$

$$\forall\, f \in L(P^c, \mathcal{A} \cap P^c, \varphi^-),\ \int_{P^c} f\, d\varphi^- = \int_{P^c} f f_0^-\, d\mu. \tag{b}$$

那么，$\forall\, f \in L(X, \mathcal{A}, |\varphi|)$ 有

$$\int_X f\, d\varphi = \int_X f\, d\varphi^+ - \int_X f\, d\varphi^- = \int_P f\, d\varphi^+ - \int_{P^c} f\, d\varphi^-.$$

据 (a),(b), 得

$$\int_X f\, d\varphi = \int_P f f_0^+\, d\mu - \int_{P^c} f f_0^-\, d\mu \tag{c}$$

定义

$$f_0(x) = \begin{cases} f_0^+(x) & 当\ x \in P, \\ -f_0^-(x) & 当\ x \in P^c. \end{cases}$$

从 (c) 看到

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f f_0\,d\mu.$$

证得 (1), 从而亦证得 (2). 结论 (3) 同样从 (a),(b) 推出. □

类似于定义 5.1, 定理 5.4 中的 f_0 叫作 φ 关于 μ 的 R–N 导数, 记作 $f_0 = \frac{d\varphi}{d\mu}$ 或 $d\varphi = f_0\,d\mu$, $\varphi = f_0 \cdot \mu$.

推论5.4.1 设 φ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 那么, 存在可测函数 f_0 使

(1) $\forall\, f \in L(X,\mathcal{A},|\varphi|)$, $\int_X f\,d\varphi = \int_X f f_0\,d|\varphi|$;

(2) $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $\varphi(A) = \int_A f_0\,d|\varphi|$;

(3) $|f_0| = 1$.

证 显然, $\varphi \ll |\varphi|$, 用定理 5.4, 存在 $f_0 \in L(X,\mathcal{A},|\varphi|)$, 使 (1),(2) 成立.

令 $A = \{x : |f_0(x)| < 1\}$, $B = \{x : |f_0(x)| > 1\}$. 用定理 5.4(3),

$$|\varphi|(A) = \int_A |f_0|\,d|\varphi|, \quad |\varphi|(B) = \int_B |f_0|\,d|\varphi|,$$

可见

$$\int_A (1 - |f_0|)\,d|\varphi| = 0 = \int_B (|f_0| - 1)\,d|\varphi|,$$

从而

$$|\varphi|(A) = |\varphi|(B) = 0.$$

将 f_0 在 $A \cup B$ 上的值改为 1, 得结论 (3). □

注 我们可直接从定义证明, $\forall\, f \in L(X,\mathcal{A},|\varphi|)$

$$\left|\int f\,d\varphi\right| \le \int |f|\,d|\varphi|.$$

用推论 5.4.1, 此式可如下推得:

$$\left|\int f\,d\varphi\right| = \left|\int f f_0\,d|\varphi|\right| \le \int |f f_0|\,d|\varphi| = \int |f|\,d|\varphi|.$$

定理5.5 (Lebesgue 分解) 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是 σ 有限测度空间， ν 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的 σ 有限符号测度. 那么 ν 可唯一地分解为两个 σ 有限符号测度之和： $\nu=\nu_1+\nu_2$, 使 $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \perp \mu$.

证 先假定 ν 是测度

由定理 5.3, 从 $\nu \ll \mu+\nu$ 知存在非负可测函数 f_0, 使

$$\forall\, f \in L(X,\mathcal{A},\nu),\quad \int_X f\,d\nu = \int_X f f_0\,d(\mu+\nu).$$

如果存在 $\varepsilon>0$ 使 $F \hat{=} \{x\in X:\ f_0(x)\geq 1+\varepsilon\}$ 满足 $(\mu+\nu)(F)>0$, 那么, 由于 $\mu+\nu$ 是 σ 有限的, 一定存在 $A\subset F$, 使 $0<(\mu+\nu)(A)<\infty$, 于是

$$\begin{aligned}&\int_X \chi_A\,d\nu = \int_X \chi_A f_0\,d(\mu+\nu),\\ &\nu(A)=\int_A f_0\,d(\mu+\nu)\geq (1+\varepsilon)(\mu+\nu)(A),\\ &(1+\varepsilon)\mu(A)+\varepsilon\nu(A)\leq 0.\end{aligned}$$

这表明 $\mu(A)=\nu(A)=0$. 这与 $(\mu+\nu)(A)>0$ 矛盾. 这就证明

$$(\mu+\nu)(\{x:\ f_0(x)>1\})=0.$$

令 $f_1=\min(f_0,1)$. 那么 $0\leq f_1\leq 1$ 且

$$\forall\, f \in L(X,\mathcal{A},\nu),\quad \int_X f\,d\nu = \int_X f f_1\,d(\mu+\nu).$$

令 $B=\{x:\ f_1(x)=1\}$. 任取 $C\subset B$, $C\in\mathcal{A}$. 只要

$$\mu(C)<\infty,\ \nu(C)<\infty,$$

就有

$$\nu(C)=\int_X \chi_C\,d\nu=\int_C f_1\,d(\mu+\nu)=\mu(C)+\nu(C).$$

可见 $\mu(C)=0$. 由此，据 μ,ν 的 σ 有限性，推出 $\mu(B)=0$.

定义 ν_1,ν_2 如下：

$\forall\, A\in\mathcal{A},\ \nu_1(A)=\nu(A\cap B^c),\ \nu_2(A)=\nu(A\cap B)$.

那么， ν_1,ν_2 都是 σ 有限测度，且

$$\nu=\nu_1+\nu_2.$$

易见 $\nu_2(B^c)=0$, 从而 $\nu_2\perp\mu$.

设 $A\in\mathcal{A},\ \mu(A)=0$.

如果 $\nu(A)<\infty$ 的话，必有

$$\nu_1(A)=\nu(A\cap B^c)=\int_{A\cap B^c}f_1\,d(\mu+\nu)=\int_{A-B}f_1\,d\nu.$$

从而

$$\int_{A-B}(1-f_1)\,d\nu=0.$$

由于在 $A-B$ 上 $1-f_1$ 大于零，所以 $\nu(A-B)=0$, 即 $\nu_1(A)=0$.

如果 $\nu(A)=\infty$, 由于 ν,ν_1 是 σ 有限的，那么从已得的结果仍推出 $\nu_1(A)=0$.

这样一来，我们证得 $\nu_1\ll\mu$.

设 ν 是符号测度. 对 ν^+,ν^- 用已得结果，有 $\nu^+=\nu_1^++\nu_2^+$, $\nu^-=\nu_1^-+\nu_2^-$, 使

$$\nu_1^+\ll\mu,\ \nu_1^-\ll\mu,\ \nu_2^+\perp\mu,\ \nu_2^-\perp\mu.$$

由于 ν^+,ν^- 当中，至少有一个是有限测度，所以 $\nu_1^+-\nu_1^-$ 与 $\nu_2^+-\nu_2^-$ 都是 σ 有限符号测度，分别记之为 ν_1 和 ν_2, 那么 $\nu=\nu_1+\nu_2$ 是合乎定理要求的分解.

Lebesgue 分解的唯一性是明显的. □

此处提醒读者，在考虑唯一性问题时，由于我们处理的是广义实数，所以从 $\nu_1+\nu_2=\nu_1'+\nu_2'$ 及 $\nu_1=\nu_1'$ 还不足以断定 $\nu_2=\nu_2'$.

下面，作为 R–N 定理的一个应用，我们来讨论 $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ $(1\le p<\infty)$ 的对偶空间.

定理5.6 设 $1\le p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ (规定 $\frac{1}{\infty}=0$). 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是 σ 有限测度空间，那么对于每个 $\ell\in[L^p(X,\mathcal{A},\mu)]^*$, 存在唯一的 $g\in L^{p'}(X,\mathcal{A},\mu)$, 使得

$$\forall\, f\in L^p(X,\mathcal{A},\mu),\ \ell(f)=\int_X fg\,d\mu \text{ 且} \|g\|_{p'}=\|\ell\|.$$

证 先考虑 $\mu(X)<\infty$ 的情形. 定义 φ: $\forall\, A\in\mathcal{A}$, $\varphi(A)=\ell(\chi_A)$. 那么

$$\begin{aligned}|\varphi(A)|&\le\|\ell\|\|\chi_A\|_p\le\|\ell\|[\mu(A)]^{1/p}\\&\le\|\ell\|[\mu(X)]^{1/p}<\infty.\end{aligned}$$

设 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, 诸 $A_k\in\mathcal{A}$ 且彼此不交，那么由 ℓ 的加性知

$$\varphi(A)=\varphi\Big(\bigcup_{k=1}^{m}A_k\Big)+\varphi\Big(\bigcup_{k=m+1}^{\infty}A_k\Big).$$

由于

$$\mu\Big(\bigcup_{k=m+1}^{\infty}A_k\Big)=\bigcup_{k=m+1}^{\infty}\mu(A_k)\to0\ (m\to\infty).$$

所以

$$\varphi\Big(\bigcup_{k=m+1}^{\infty}A_k\Big)\to0\qquad(m\to\infty).$$

从而

$$\varphi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k).$$

证得 φ 为有限符号测度，且明显地 $\varphi\ll\mu$.

用定理 5.4, 存在 $g \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$, 使得 $\forall\ A \in \mathcal{A}$,

$$\varphi(A) = \int_A g\, d\mu = \int_X \chi_A g\, d\mu = \ell(\chi_A).$$

由此可见，对于任何简单函数 f, 皆成立

$$\ell(f) = \int_X fg\, d\mu.$$

下面先处理 $1 < p < \infty$ 的情形，取非负简单函数 h_k $(k \in \mathbb{N})$, 使 $h_k \nearrow |g|$, 并令

$$g_k = h_k^{p'-1} \operatorname{sgn} g \quad (k \in \mathbb{N}).$$

那么 g_k 是简单函数,

$$\ell(g_k) = \int_X h_k^{p'-1} |g|\, d\mu \le \|\ell\| \|g_k\|_p = \|\ell\| \left(\int_X h_k^{p'}\, d\mu \right)^{1/p}.$$

同时，由于 $h_k \le |g|$, 所以

$$\int_X h_k^{p'}\, d\mu \le \ell(g_k).$$

这样，我们推出

$$\|h_k\|_{p'} \le \|\ell\|.$$

令 $k \to \infty$, 据 Levi 定理，得

$$\|g\|_{p'} \le \|\ell\|.$$

现设 $p = 1, \forall\ A \in \mathcal{A}$, 令 $h_A = \chi_A \operatorname{sgn} g$, 那么

$$\ell(h_A) = \int_A |g|\, d\mu \le \|\ell\|\ \|h_A\|_1 \le \|\ell\| \mu(A).$$

由此推出 $g \in L^{p'} = L^\infty$ 且 $\|g\|_\infty \le \|\ell\|$.

总之， $g \in L^{p'}$, $\|g\|_{p'} \le \|\ell\|$, 且对于简单函数 f,

$$\ell(f) = \int_X fg\, d\mu.$$

现设 $f \in L^p(= L^p(X, \mathcal{A}, \mu))$. 那么存在简单函数 f_k $(k \in \mathbb{N})$, 使 $\|f_k - f\|_p \to 0$ $(k \to \infty)$. 从而

$$\begin{aligned}\ell(f) &= \ell(f - f_k) + \ell(f_k) \\ &= \ell(f - f_k) + \int_X (f_k - f) g\, d\mu + \int_X fg\, d\mu.\end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 注意到 $\ell(f - f_k) \to 0$ 及 $\int_X (f_k - f) g\, d\mu \to 0$, 得到

$$\ell(f) = \int_X fg\, d\mu.$$

由此，用 Hölder 不等式，得

$$|\ell(f)| \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

由此证得 $\|\ell\| \le \|g\|_{p'}$.

与前面的结果合起来，证得 $\|\ell\| = \|g\|_{p'}$.

g 的唯一性是明显的.

当 $\mu(X) < \infty$ 时，定理的结论已证实.

对于 $\mu(X) = \infty$ 的情形，由于 μ 是 σ 有限的，对 X 作有限测度的可列并分解，利用已得结果过渡到极限情形便证得定理的结论. □

我们指出，在我们的论述体系中，证明 R–N 定理时用到了 L^2 空间上有界线性泛函的表示定理. 所以从逻辑上来说，定理 5.6 的证明只对于 $p \neq 2$ 有效.

根据定理 5.6, 在等距同构的意义下我们写 $(L^p)^* = L^{p'}$ $(1 \le p < \infty)$.

习　题

1. 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间．定义 ν:

$$\nu(A) = 0, \quad 当 \quad \mu(A) = 0,$$
$$\nu(A) = \infty \quad 当 \quad \mu(A) > 0.$$

证明 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是测度空间，且 $\nu \ll \mu$. 对于 μ, ν, 找一个使定理 5.3 结论成立的 f_0.

2. 证明链式法则：设 μ_0, μ_1, μ_2 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的 σ 有限测度，且 $\mu_2 \ll \mu_1$, $\mu_1 \ll \mu_0$, 那么 $\mu_2 \ll \mu_0$ 且

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_0} = \frac{d\mu_2}{d\mu_1} \cdot \frac{d\mu_1}{d\mu_0} \quad \mu_0 - a.e..$$

3. 设 μ, ν 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的 σ 有限测度，满足 $\nu \ll \mu$ 且 $\mu \ll \nu$. 证明：

$$\frac{d\nu}{d\mu} \neq 0 \ a.e., \ 且 \ \frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^{-1} \ a.e.$$

此处 μ−a.e. 与 ν−a.e. 是一样的.

4. 设 $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : \min(\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{A^c}}) \leq \aleph_0\}$. 证明 $\mathcal{A}$ 是 σ 代数．定义 μ, ν 如下：

$$\forall\, A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = \begin{cases} \overline{\overline{A}}, & 当\ \overline{\overline{A}} < \aleph_0, \\ \infty, & 当\ \overline{\overline{A}} \geq \aleph_0; \end{cases}$$

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & 当\ \overline{\overline{A}} \leq \aleph_0, \\ \infty, & 当\ \overline{\overline{A}} = \aleph_1. \end{cases}$$

那么 μ, ν 都是 $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ 上的测度．请证明 $\nu \ll \mu$ 但 R–N 定理在这种情形下不成立.

5. 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是 σ 有限测度空间， $1\le p\le\infty$, f 可测. 令

$$\mathcal{F}=\Big\{g:\ \|g\|_{p'}\le 1,\ \mu(\{x\in X:\ g(x)\ne 0\})<\infty \text{ 且 } \int_X fg\,d\mu \text{ 存在}\Big\}$$

其中 p' 是 p 的共轭数，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{1}{\infty}=0$. 证明

$$\|f\|_p=\sup\Big\{\int_X fg\,d\mu:\ g\in\mathcal{F}\Big\}.$$

6. 请详细写出定理 5.6 当 $\mu(X)=\infty$ 时的证明.

§6. 外测度

这一节分成五段，其中第 (五) 段可以不读.

(一) 由外测度导出测度

定义6.1 设 X 是集合， $\mathcal{M}=2^X$, 设 μ^* 是 $\mathcal{M}$ 上的广义实值集函数，满足

(1) $\forall A\in\mathcal{M}$, $\mu^*(A)\ge 0$; $\mu^*(\emptyset)=0$;

(2) $A\subset B\Longrightarrow \mu^*(A)\le\mu^*(B)$;

(3) $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\Longrightarrow \mu^*(E)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$.

称 μ^* 为 X 上的外测度. 性质 (3) 称为可列次加性.

若 $\mu^*(X)<\infty$, 称 μ^* 为有限的；若对于每个 $i\in\mathbb{N}$ 存在 E_i, 使得 $\mu^*(E_i)<\infty$ 并且 $X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$, 则称 μ^* 是 σ 有限的.

例 1 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度

称形如 $I = \{x \in \mathbb{R}^n:\ a_i < x_i < a_i + \ell_i,\ i = 1, \cdots, n\}$ 的集合(其中诸 $a_i \in \mathbb{R}$, $\ell_i \in (0, \infty)$) 为 $\mathbb{R}^n$ 的矩形. 为方便, 空集 $\emptyset$ 也叫作矩形, 其边长为零.

规定 I 具有体积 $\ell_1\ell_2\cdots\ell_n$, 记作 $|I|$.

$\forall E \subset \mathbb{R}^n$ 定义

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\ I_k \text{ 为矩形},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E\right\}$$

集函数 m^* 是"实变"课程中已详细讨论过的 Lebesgue 外测度.

定义6.2 设 μ^* 是 X 上的外测度. 若 $E \subset X$ 满足下述以数学家 Carathéodory 的名字命名的条件:

$$\text{(C)} \qquad \forall A \subset X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

则称 E 为 μ^* 可测集.

定理6.1 设 μ^* 是 X 上的外测度, $\mathcal{A}$ 为 μ^* 可测集之全体. 那么 $\mathcal{A}$ 是 σ 代数. 设 μ 是 μ^* 在 $\mathcal{A}$ 上的限制, 则 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是完全的测度空间, 称 μ 为 μ^* 导出的测度, 也称 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 μ^* 导出的.

这个定理可按下述步骤进行证明:

(1) 设 A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$, 证明 $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$;

(2) 用数学归纳法证明下述

引理6.2 设 $A_k \in \mathcal{A}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$ $(k \neq j)$. 记 $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. 那么

$$\forall E \subset X,\ \mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A^c).$$

于上式中代替 E 以 $E \cap A$, 得

$$\mu^*(E \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E \cap A_k),$$

从而 $A\in\mathcal{A}$.

(3) 用 (1), (2) 的结论，证明 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 是完全的测度空间.

这些步骤，在实变课程中建立 Lebesgue 测度时已实施过，这里不再重述.

我们看到, 例 1 中 m^* 导出的测度 m 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的寻常 Lebesgue 测度，是我们在实变课程中详细研究过的.

为了进一步研究 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度及其导出的测度，特别是为了介绍 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度，我们先一般地在距离空间上讨论一下与距离有关的外测度.

定义6.3 设 (X,d) 是距离空间， μ^* 是 X 上的外测度. 若 μ^* 满足下述条件：

(d) $\forall E_1,E_2\subset X$, 当

$$\rho(E_1,E_2)\overset{\text{def}}{=}\inf\{d(x_1,x_2):\ x_1\in E_1,\ x_2\in E_2\}>0$$

时 $\mu^*(E_1\cup E_2)=\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2)$, 则称 μ^* 为 X 上 (或 (X,d) 上) 的 **距离外测度**.

定义6.4 设 (X,d) 是距离空间. X 中的全体开集生成的 σ 代数记作 $\mathcal{B}$(即包含全体开集的最小 σ 代数), 叫 Borel 代数.

应该说明，关于 Borel 代数的定名，目前尚无统一的规定. 例如，有的书上定义全体紧集生成的 σ 代数为 Borel 代数，而全体开集生成的 σ 代数为弱 Borel 代数.

定理6.3 设 μ^* 是距离空间 (X,d) 上的距离外测度， μ^* 可测集之全体记为 $\mathcal{A}$, 则 $\mathcal{A}\supset\mathcal{B}$.

证 我们证明，开集是 μ^* 可测的.

设 G 是开集， $G\neq X$. 对于子集 $A\subset G$, 令

$$A_k=\left\{x\in A:\ \rho(\{x\},\ G^c)\geq\frac{1}{k}\right\},\ k\in\mathbb{N}.$$

显然，$A_k \nearrow A$. 令

$$B_1 = A_1,\ B_{k+1} = A_{k+1} - A_k,\quad k \in \mathbb{N}.$$

那么，有不交并分解式：

$$A = A_k \bigcup \left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} B_j \right),\quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

据可列次加性，

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A_k) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu^*(B_j).$$

如果 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j) < \infty$ 的话，令 $k \to \infty$ 将得到

$$\mu^*(A) \le \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k).$$

考虑到 $A \supset A_k$ 及 μ^* 的单调性，就推出

$$\mu^*(A) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k).$$

设 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j) = \infty$, 对于 $k \ge 3$, 有

$$A_k \supset \bigcup_{0\le 2j<k} B_{k-2j},$$
$$A_k \supset \bigcup_{0\le 2j<k-1} B_{k-2j-1}.$$

由于 $\rho(A_j, B_{j+2}) > 0$, μ^* 为距离外测度，所以

$$\mu^*(A_k) \ge \sum_{0\le 2j<k} \mu^*(B_{k-2j}),$$
$$\mu^*(A_k) \ge \sum_{0\le 2j<k-1} \mu^*(B_{k-2j-1}).$$

从而

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_k) \geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\mu^*(B_j) \to \infty \quad (k \to \infty).$$

证得 $\mu^*(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu^*(A_k)$.

对于任意的 $E \subset X$, 记 $E \cap G = A$, $E \cap G^c = B$, 令 $A_k = \{x \in A: \ \rho(\{x\}, G^c) \geq \frac{1}{k}\}$, $k \in \mathbb{N}$. 那么 $\rho(A_k, B) > 0$,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(A_k \cup B) = \mu^*(A_k) + \mu^*(B).$$

令 $k \to \infty$, 根据前面已得的结果，得到

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

这就证明了开集 G 满足条件 (C), 从而 $G \in \mathcal{A}$.

由于 $\mathcal{B}$ 是包含一切开集的最小 σ 代数，所以 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. □

关于外测度，我们引入

定义6.5 设 μ^* 是 X 上的外测度，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 μ^* 导出的测度空间.

如果 $\forall E \subset X$, $\exists A \in \mathcal{A}$, 使

$$E \subset A \text{ 且 } \ \mu^*(E) = \mu(A),$$

则称 μ^* 是正则的 (regular).

(二) $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 外测度

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实值单调增函数，对于有限区间 $(a, b] \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\lambda_f((a, b]) = f(b) - f(a),$$

当 $a = b$ 时，我们认为 $(a, b] = \emptyset$.

对于 $A \subset \mathbb{R}$, 定义

$$\wedge_f^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_f((a_k, b_k]):\ \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k] \supset A\right\}.$$

由此定义知， $\wedge_f^*(\emptyset) = 0$.

那么，根据定义 6.1, $\wedge_f^*$ 是 $\mathbb{R}$ 上的外测度. 我们称之为由 f 决定的 L-S 外测度，由它导出的测度记为 $\wedge_f$, 叫作由 f 决定的 L-S 测度.

定理6.4 $\wedge_f^*$ 是正则的距离外测度.

证 分成两步.

(1) $\wedge_f^*$ 是距离外测度.

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, $\rho(E_1, E_2) = \delta > 0$. 为写起来简便，用 $\wedge^*$ 代表 $\wedge_f^*$. 我们来证明

$$\wedge^*(E_1 \cup E_2) \geq \wedge^*(E_1) + \wedge^*(E_2).$$

显然，只须对 $\wedge^*(E_1 \cup E_2) < \infty$ 的情形进行证明.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 一串 $I_k = (a_k, b_k]$, 使

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k] \supset (E_1 \cup E_2),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[f(b_k) - f(a_k)] < \wedge^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.$$

将每个 I_k 等分成有限个半开区间 $(c_j, d_j]$, 使得 $d_j - c_j < \delta$, $j = 1, \cdots, m = m_k$. 那么

$$\bigcup_{j=1}^{m}(c_j, d_j] = I_k,$$

$$\sum_{j=1}^{m}[f(d_j) - f(c_j)] = f(b_k) - f(a_k).$$

根据这个事实，我们一开始就可以认为每个 I_k 的长度 $(b_k - a_k)$ 都小于 δ.

令

$$N_1 = \{k \in \mathbb{N}:\ I_k \cap E_1 \neq \emptyset\},$$
$$N_2 = \{k \in \mathbb{N}:\ I_k \cap E_2 \neq \emptyset\}.$$

由于 $|I_k| < \rho(E_1, E_2)$, $k \in \mathbb{N}$, 所以 $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. 于是

$$\bigcup_{k \in N_1} I_k \supset E_1, \quad \bigcup_{k \in N_2} I_k \supset E_2.$$

我们得到

$$\begin{aligned}\wedge^*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon &\geq \sum_{k \in N_1} [f(b_k) - f(a_k)] + \sum_{k \in N_2} [f(b_k) - f(a_k)] \\ &\geq \wedge^*(E_1) + \wedge^*(E_2).\end{aligned}$$

(2) $\wedge^*$ 是正则的.

我们来证明，事实上， $\forall E \subset \mathbb{R}$, $\exists B \in \mathcal{B}$ 使 $E \subset B$ 且 $\wedge^*(E) = \wedge(B)$.

对于每个 $k \in \mathbb{N}$, 找一串半开区间 $\{(a_i, b_i]\}$, 使 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \supset E$ 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} [f(b_i) - f(a_i)] < \wedge^*(E) + \frac{1}{k}.$$

记 $B_k = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$, 显然. $B_k \in \mathcal{B}$. 令 $B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, 则 $E \subset B \in \mathcal{B}$, 且 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\wedge^*(E) \leq \wedge^*(B) \leq \wedge^*(B_k)$. 注意到

$$\wedge^*(B_k) \leq \sum_{i=1}^{\infty} [f(b_i) - f(a_i)] < \wedge^*(E) + \frac{1}{k},$$

我们推出 $\wedge^*(B) \leq \wedge^*(E)$, 从而 $\wedge^*(E) = \wedge(B)$. □

(三) Lebesgue-Stieltjes 积分

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实值单调增函数， $\wedge^*$ 是 f 决定的 L–S 外测度，它导出测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \wedge)$. 我们已经证明 $\wedge^*$ 可测集全体 —σ 代数 $\mathcal{A}$, 包含着 Borel 集的全体 —σ 代数 $\mathcal{B}$. 将 $\wedge$ 限制在 $\mathcal{B}$ 上, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \wedge)$ 亦为一测度空间.

由定理 6.4 的证明看到,

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\exists B \in \mathcal{B}$, 使

$$A \subset B, \ \wedge(A) = \wedge(B).$$

也就是说， $A = B - Z$, $\wedge(Z) = 0$. 由此可见， $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 实际上并不差多少. 然而 $\mathcal{B}$ 的结构比 $\mathcal{A}$ 明白得多.

我们说到 L–S 积分指的是测度空间 $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \wedge)$ 或 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \wedge)$ 上的积分，其中 $\wedge$ 是由一个单调增有限实值函数导出的 L–S 测度.

定理6.5 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上单调增右连续实值函数， g 是 $\mathbb{R}$ 上的有界 $\mathcal{B}$ 可测函数. 若在有限区间 $[a, b]$ 上 Riemann-Stieltjes 积分 $\int_a^b g\,df$ 存在，则

$$\int_{\mathbb{R}} g\chi_{(a,b]}\,d\wedge_f = \int_a^b g\,df.$$

证 (A) 先证明，对于有限区间 $(c, d]$,

$$\wedge_f((c, d]) = f(d) - f(c) = \lambda_f((c, d]).$$

下面我们略去 $\wedge_f$ 的下标 f. 显然,

$$\wedge((c, d]) = \wedge^*((c, d]) \leq f(d) - f(c).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在一串 $I_k = (a_k, b_k]$ 复盖 $(c, d]$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}[f(b_k) - f(a_k)] < \wedge((c, , d]) + \varepsilon.$$

由 f 的右连续性知，存在 $b_k' > b_k$, 使

$$f(b_k) \le f(b_k') < f(b_k) + 2^{-k}\varepsilon.$$

对于任意的 $a \in (c,d)$, 显然 $\{I_k\}$ 复盖 $[a,d]$. 从而 $\{(a_k, b_k')\}$ 复盖 $[a,d]$. 用有限复盖定理 (此处用到 $\mathbb{R}$ 的局部紧性质), 知存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\bigcup_{k=1}^{N}(a_k, b_k') \supset [a,d]$. 那么，明显地

$$\sum_{k=1}^{N}[f(b_k') - f(a_k)] \ge f(d) - f(a).$$

同时,

$$\sum_{k=1}^{N}[f(b_k') - f(a_k)] \le \sum_{k=1}^{\infty}[f(b_k) - f(a_k)] + \varepsilon.$$

因此

$$f(d) - f(a) \le \sum_{k=1}^{\infty}[f(b_k) - f(a_k)] + \varepsilon < \wedge((c,d]) + 2\varepsilon.$$

令 $a \to c^+$ 及 $\varepsilon \to 0$. 得

$$f(d) - f(c) \le \wedge((c,d]).$$

(B) 设 T 是 $[a,b]$ 的一个分法:

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$$

相应的 R–S 上和与下和分别是

$$U(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i[f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

$$L(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i[f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

式中

$$M_i = \sup\{g(x):\ x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$m_i = \inf\{g(x):\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

令

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{(x_{i-1}, x_i]},$$
$$g_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{(x_{i-1}, x_i]}.$$

那么

$$g_1 \geq g \geq g_2,\quad \int_{\mathbb{R}} g_1\, d\wedge \geq \int_{\mathbb{R}} g\, d\wedge \geq \int_{\mathbb{R}} g_2\, d\wedge .$$

由于 (A) 中已证的结果，$\wedge((x_{i-1}, x_i]) = f(x_i) - f(x_{i-1})$, 所以，从简单函数积分的定义知

$$U(T) = \int_{\mathbb{R}} g_1\, d\wedge,\quad L(T) = \int_{\mathbb{R}} g_2\, d\wedge$$

因此

$$U(T) \geq \int_{\mathbb{R}} g\, d\wedge \geq L(T).$$

由于 g 关于 f 在 $[a,b]$ 上 R–S 可积，故当分法 T 的模趋于零时，$U(T)$ 与 $L(T)$ 同趋于 $\int_a^b g\, df$. 那么从上面的不等式证得

$$\int_a^b g\, df = \int_{\mathbb{R}} g\, d\wedge .\square$$

在 (二),(三) 中我们已经看到一个由外测度产生测度的实例，并在一定条件下得到了 L–S 积分与《实变》中已讨论过的 R–S 积分的关系．在这个例子中，当 f 取恒等函数，即 $f(x) = x$ 时，我们就回到了寻常的 Lebesgue 测度.

下面再介绍一个外测度导出测度的例子，这就是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Hausdorff 外测度.

(四) Hausdorff 外测度

设 $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$.. 对于 $A \subset \mathbb{R}^n$, 若 $A \neq \emptyset$, 则定义

$$H_\alpha^\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \delta(A_k)^\alpha : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A,\ \delta(A_k) < \varepsilon \right\}$$

其中 $\delta(A_k)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的点集 A_k 的直径，即

$$\delta(A_k) = \sup\{|x-y| :\ x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

定义

$$H_\alpha(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_\alpha^\varepsilon(A) \quad A \subset \mathbb{R}^n,\ A \neq \emptyset,$$
$$H_\alpha(\emptyset) = 0.$$

容易验证，H_α 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正则的距离外测度，叫作 Hausdorff 外测度，它导出的测度也以 Hausdorff 的姓氏命名.

容易证明，当 $\alpha = n$ 时，H_α 与 Lebesgue 外测度 m^* 等价 (即存在 $c > c' > 0$, 使 $\forall A \subset \mathbb{R}^n$, 成立着 $cH_n(A) \geq m^*(A) \geq c'H_n(A)$). 而当 $\alpha > n$ 时，$H_\alpha = 0$, 所以 H_α 的独特功能全在于 $0 < \alpha < n$ 的情形.

关于 H_α, 我们不拟详述，有兴趣的读者可参阅《Measure and Integrals》(R.L. Wheeden & A. Zygmund)

(五) 由测度导出外测度，再导出扩张了的测度

前面我们谈论的测度，都是在 σ 代数上定义的. 如果去掉 σ 代数的可列可加性而只保证有限可加性，它就成为 **代数**. 在代数上可定义与测度具有同样性质的广义实值集函数. 可仍称之为测

度，我们下面为了区别，称之为 **准测度**. 有了准测度，可以导出一个外测度，这个外测度再导出一个测度，这个测度必是原来的准测度的扩张. 这一段的目的就是来描述这样一个扩张测度的过程.

定义6.6 设 X 是集合， $\mathcal{A}$ 是 X 的一些子集所成的非空的集合. 如果

(1) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(2) $A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{A}\ (k \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}$

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的 **代数**.

定义6.7 设 $\mathcal{A}$ 是 X 上的代数. 设 μ 是代数 $\mathcal{A}$ 上的非负广义实函数，满足

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) 若 $A_k \in \mathcal{A}$, $(k \in \mathbb{N}), A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$, 且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, 则

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

那么称 μ 为 $(X,\mathcal{A})$ 上 (或 $\mathcal{A}$ 上) 的 **准测度**.

准测度 μ 的 "有限" 与 "σ 有限" 概念与定义 1.4 同.

定义6.8 设 λ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的准测度.

$$\forall E \subset X,\ \lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k):\ A_k \in \mathcal{A},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A\right\}.$$

非常明显， λ^* 是外测度，叫作由准测度 λ 导出的外测度.

定理6.6 设 λ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的准测度， λ^* 是 λ 导出的外测度， $\mathcal{A}^*$ 是 λ^* 可测集族. 那么

(1) $\forall A \in \mathcal{A},\ \lambda^*(A) = \lambda(A)$,

(2) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.

这个定理的证明是容易的，留作习题.

定义6.9 设 λ 是代数 $\mathcal{A}$ 上的准测度，Σ 是包含 $\mathcal{A}$ 的 σ 代数，μ 是 Σ 上的测度. 若 μ 在 $\mathcal{A}$ 上与 λ 相同，则称 μ 是 λ 的 **扩张**(从 $\mathcal{A}$ 到 Σ 的扩张).

定理6.7 (Carathéodory-Hahn 扩张定理) 设 λ 是 $(X, \mathcal{A})$ 上的准测度，λ^* 是 λ 导出的外测度，λ^* 可测集族为 $\mathcal{A}^*$. 那么

(1) λ^* 是 λ(从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}^*$) 的扩张.

(2) 若 λ 是 σ 有限的，则对于任何 σ 代数 $\mathcal{M}$, 只要 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A}^*$,$\lambda$ 从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的扩张就是唯一的，即 λ^* 在 $\mathcal{M}$ 上的限制.

证 (1) 即定理 6.6.

设 μ 是 λ 从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{M}$ 的扩张. 因 λ 是 σ 有限的，故 X 可表为不交并：

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} S_k,\ S_k \in \mathcal{A},\ \lambda(S_k) < \infty,\ k \in \mathbb{N}.$$

对于 $E \in \mathcal{M}$, 令

$$E_k = E \cap S_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

对于任何一串集 $A_j \in \mathcal{A}$, 只要 $\cup A_j \supset E_k$, 就有

$$\mu(E_k) \leq \sum \mu(A_j) = \sum \lambda(A_j).$$

从而

$$\mu(E_k) \leq \lambda^*(E_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

同时，

$$\begin{aligned}
&\mu(S_k - E_k) \leq \lambda^*(S_k - E_k), \\
&\mu(E_k) + \mu(S_k - E_k) = \mu(S_k) = \lambda(S_k) \\
&\quad = \lambda^*(S_k) = \lambda^*(E_k) + \lambda^*(S_k - E_k) < \infty.
\end{aligned}$$

所以

$$\mu(E_k)=\lambda^*(E_k),\quad k\in\mathbb{N},$$
$$\mu(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^*(E_k)=\lambda^*(E).\square$$

由扩张定理，结合 (二) 中的讨论，立即得到两个推论.

推论6.7.1 若测度空间 $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu)$ 与 $(\mathbb{R},\mathcal{B},\nu)$ 在每个有限区间 $(a,b]$ 上都满足

$$\mu((a,b])=\nu((a,b])<\infty.$$

则 $\mu=\nu$.

推论6.7.2 设 $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu)$ 为测度空间， μ 在有限区间上取有限的值. 那么，必存在单调增右连续实值函数 f, 使 f 决定的 L–S 测度在 $\mathcal{B}$ 上与 μ 相同.

这两个推论的详细证明留给读者作为练习. 我们这里只建议一个证明的思路.

设 $\mathcal{A}$ 是包含一切半开区间 $(a,b]$ 的最小代数，那么 $\mathcal{A}$ 实际上由形如 $(-\infty,a]$, $(a,b]$, $(b,+\infty)$ 的区间的有限并及空集组成. 相应于 $\mathcal{B}$ 上的测度 μ, 可定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\mu((0,x]), & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -\mu((0,x]), & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

容易验证， f 是单调增右连续实函数. 然后，如 (二) 中那样定义 λ_f. 这里作为极限情形，在等式 $\lambda_f((a,b])=f(b)-f(a)$ 中允许 a,b 取无穷值. 那么，可以验证，这个 λ_f 是 $\mathcal{A}$ 上的准测度. 由此，使用定理 6.7, 便可证得两推论.

习 题

1. 设 μ^* 是 X 上的正则的外测度， $E_n \subset X$ 且 $E_n \subset E_{n+1}$. 求证

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*\big(\lim_{n\to\infty} E_n\big).$$

2. 证明定理 6.1.
3. 证明：定理 6.5 去掉 f 右连续的条件就不再成立 (举出反例).
4. 证明本节 (四) 中定义的 H_α 确实是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离外测度，并且是正则的.
5. 证明本节关于测度扩张的定理 6.6.
6. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的单调增绝对连续函数， $\wedge_f$ 是它决定的 L–S 测度. 用 m 表寻常的 Lebesgue 测度. 则 $\wedge_f \ll m$.
7. 验证一下，如果 I 是 $\mathbb{R}$ 上的恒等函数，即 $I(x)=x$, 则 $\wedge_I = m$ (寻常 Lebesgue 测度).
8. 设 μ^* 是 X 上的外测度， $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是 μ^* 导出的测度空间. 设 μ 导出的外测度是 μ_1^*. 证明：

   (1) $\mu_1^* \geq \mu^*$;

   (2) 对于集 $E \subset X$, $\mu^*(E) = \mu_1^*(E)$ 成立的充要条件是存在一个 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $E \subset A$ 且 $\mu(A) = \mu^*(E)$.

   由此可见，若 μ^* 是正则的，则 $\mu_1^* = \mu^*$.
9. 试构造一个不正则的外测度.
10. 设 $\wedge_f$ 是 $\mathbb{R}$ 上单调增函数 f 导出的 L–S 测度. 证明：若 $\wedge_f \ll m$ 则

$$\frac{d\wedge_f}{dm} = f' \quad (m-\text{a.e.})$$

   此处 m 代表寻常 Lebesgue 测度.
11. 证明推论 6.7.1 和 6.7.2.

§7. 乘积测度与 Fubini 定理

在实变课程中，我们已经学习过用累次积分来计算多重积分的办法. 这个方法根据的是著名的 Fubini 定理. 这是分析学中的最重要的结果之一. 它不但具有重要的理论意义，也具有很高的实用价值. 例如在 Fourier 变换的理论中， Fubini 定理具有基本的重要性. 在概率论的许多场合也广泛地使用着这个定理.

(一) **几个简单的例子.**

例 1 设 $I=(0,1)$, $I^2=(0,1)\times(0,1)$,

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad (x,y)\in I^2.$$

作为 Riemann 积分，有

$$\int_I f(x,y)\,dy=\int_0^1\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y' dy=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in I.$$

由此，作为 Lebesgue 积分

$$\int_I\left[\int_I f(x,y)\,dy\right]dx=\frac{\pi}{4};$$

同时

$$\int_I\left[\int_I f(x,y)\,dx\right]dy=-\frac{\pi}{4}.$$

这样，我们看到， $f(x,y)$ 先对于 y 作 L 积分再对 x 作 L 积分，与先对 x 作 L 积分再对 y 作 L 积分，两个结果是不一样的.

原因何在？我们不去仔细追究，只是指出一个重要的事实：$f\notin L(I^2)$. 为了证明 $f\notin L(I^2)$, 对于每个 $k\in\mathbb{N}$, 定义

$$D_k=\left\{(x,y)\in I^2:\ 2^{-k}<x^2+y^2<2^{-k+1},\ x>2y\right\}.$$

诸 D_k 两两不交. 在 D_k 上

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{x^2+y^2} \\ &> \left(1-\frac{2y^2}{4y^2+y^2}\right)\frac{1}{x^2+y^2} > \frac{3}{5}2^{k-1}. \end{aligned}$$

D_k 的 Lebesgue 测度是

$$|D_k| = \pi\left(2^{-k+1}-2^{-k}\right)\theta = \pi\theta 2^{-k},$$

式中

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{1}{2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{I^2}|f|\,dxdy &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{D_k}|f|\,dxdy \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}2^{k-1}\cdot\pi\theta 2^{-k}\right) = \infty. \end{aligned}$$

例 2 令 $f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$.
当 $x\neq 0$ 时, $f(x,\cdot)\in L(\mathbb{R})$, 且

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 0.$$

同时, 当 $y\neq 0$ 时, $f(\cdot,y)\in L(R)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right]dx = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right]dy = 0.$$

但是 $f \neq L(\mathbb{R}^2)$.

为证 $f \neq L(\mathbb{R}^2)$, 对于每个 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$S_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2^{-k} < x^2+y^2 < 2^{-k+1},\ 0 < \frac{1}{2}y < x < 2y\right\}.$$

诸 S_k 两两不交. 在 S_k 上, $xy > \frac{1}{4}(x^2+y^2)$, 从而

$$f(x,y) > \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+y^2} > 2^{k-3}.$$

而 S_k 的面积 —Lebesgue 测度是

$$|S_k| = \pi\theta 2^{-k},$$

其中 $\theta = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{3}{4}$. 所以

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f|\, dxdy \geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{S_k} f\, dxdy \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-3}\cdot \pi\theta 2^{-k} = \infty.$$

例 3 设 $I = [0,1]\times[0,1]$, μ_1 是 $[0,1]$ 上的寻常 Lebesgue 测度, μ_2 是 $[0,1]$ 上的计数测度. 令 $\Delta = \{(x,x):\ 0 \leq x \leq 1\}$.

设 $f(x,y) = \chi_{\Delta}(x,y)$. 那么

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\mu_1(x) = 0,\quad \forall y \in [0,1],$$
$$\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\mu_2(y) = 1,\quad \forall x \in [0,1].$$

所以

$$\int_{[0,1]}\left[\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\mu_1(x)\right] d\mu_2(y) = 0,$$
$$\int_{[0,1]}\left[\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\mu_2(y)\right] d\mu_1(x) = 1.$$

从以上几个例子看到，累次积分交换次序的问题是一个相当复杂的问题.

解决这个问题的一个重要途径是引入乘积测度的概念.

(二) **乘积测度**

定义7.1 设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 是两个测度空间. 令 $X\times Y$ 表示 X 和 Y 的乘积，即

$$X\times Y=\{(x,y):\quad x\in X,\ \ y\in Y\}.$$

(1) 若 $A\subset X$, $B\subset Y$, 则 $A\times B$ 叫作 $X\times Y$ 的 **矩形**. 当 $A\in\mathcal{A}$,$B\in\mathcal{B}$ 时， $A\times B$ 叫作 **可测矩形**. 用字母 $\mathcal{R}$ 表示可测矩形之全体，用 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 表示 $X\times Y$ 上的包含 $\mathcal{R}$ 的最小 σ 代数.

(2) 在 $\mathcal{R}$ 上定义函数 λ:

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\quad A\times B\in\mathcal{R}.$$

可以把 $\lambda(A\times B)$ 叫做 $A\times B$ 的面积.

我们再次强调，在实分析的计算系统中，零与无穷的乘积等于零.

引入乘积测度的办法是基于可测矩形的面积函数 λ, 在 $X\times Y$ 上定义 **外测度**, 然后导出测度. 这可以通过使用 §6 (五) 的结果，从测度扩张的角度去进行. 但我们宁可略去 §6 (五) 的过于形式化的讨论，而直接根据 λ 来定义外测度. 这样做简捷得多，且易于接受. 当然， §6 (五) 的讨论自有其理论意义. 有兴趣的读者可以自己阅读.

以下的讨论中总假设 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{B},\nu)$ 是测度空间， $\mathcal{R}$ 是 $X\times Y$ 的可测矩形之全体.

定义7.2 对于每个集 $E\in X\times Y$, 令

$$\lambda^*(E)=\inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k):\quad I_k\in\mathcal{R},\quad \bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\supset E\Big\}.$$

引理7.1 λ^* 是 $X \times Y$ 上的外测度，且

$$\lambda^*(I) = \lambda(I), \quad \forall I \in \mathcal{R}.$$

证 根据定义 6.1 我们只需证明 λ^* 满足可列次加性.

设 $E_k \in X \times Y,\ k \in \mathbb{N}$. 记 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. 由 λ^* 的定义知，任给 $\varepsilon > 0$, 存在可测矩形 $I_{kj},\ k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$, 使得

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{kj} \supset E_k, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_{kj}) \leq \lambda^*(E_k) + 2^{-k}\varepsilon.$$

显然，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{kj} \supset E.$$

因而，

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_{kj}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(E_k) + \varepsilon.$$

这就证明了 λ^* 的可列次加性. □

把全体 λ^* 可测集 (即关于 λ^* 满足 Carathéodory 条件的集，见定义 6.2) 收集起来，记作 $\mathcal{M}$. 把 λ^* 在 $\mathcal{M}$ 上的限制记作 λ, 并记 $\lambda = \mu \times \nu$. 由定理 6.1 知，$(X \times Y, \mathcal{M}, \lambda)$ 是完全的测度空间.

引理7.2

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{M}.$$

证 只需证明每个可测矩形 $I = A \times B$ 都关于外测度 λ^* 满足 Carathéodory 条件. 令

$$I_1 = (X - A) \times B, \qquad I_2 = A \times (Y - B),$$
$$I_3 = (X - A) \times (Y - B).$$

显然， I_1, I_2, I_3 都是可测矩形．我们有

$$I^c = I_1 \cup I_2 \cup I_3.$$

对于任意的 $E \in X \times Y$, 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在可测矩形 $J_k, k \in \mathbb{N}$, 使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \supset E, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_k) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon.$$

令

$$J_{k0} = J_k \bigcap I, \quad J_{k\nu} = J_k \bigcap I_\nu, \ \nu = 1, 2, 3.$$

那么，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{k0} \supset E \bigcap I, \qquad \bigcup_{\nu=1}^{3} \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{k\nu} \supset E \bigcap I^c.$$

因此，

$$\lambda^*(E \bigcap I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_{k0}), \qquad \lambda^*(E \bigcap I^c) \leq \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_{k\nu}).$$

于是

$$\begin{aligned} \lambda^*(E \bigcap I) + \lambda^*(E \bigcap I^c) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{3} \lambda(J_{k\nu}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_k) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

此式表明

$$\lambda^*(E \bigcap I) + \lambda^*(E \bigcap I^c) \leq \lambda^*(E).$$

由此可见， I 满足 Carathéodory 条件． □

定义7.3 上述 $(X \times Y, \mathcal{M}, \lambda)$, 和 $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \lambda)$ 都叫做 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 的乘积测度空间；相应地 $\lambda = \mu \times \nu$ 叫乘积测度.

注 $(X\times Y,\mathcal{M},\mu\times\nu)$ 是由外测度导出的，所以一定是完全的. 但 $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mu\times\nu)$ 可以不完全. 事实上，如果存在 $A\subset X$ 使 $A\notin\mathcal{A}$ 及 $B\in\mathcal{B}$, $B\neq\emptyset$, 且 $\nu(B)=0$, 那么， $A\times B\notin\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 而 $X\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 并且

$$\mu\times\nu(A\times B)=\mu\times\nu(X\times B)=0.$$

(三) Fubini定理

对于 $E\subset X\times Y$, 引入记号

$$E_x=\{y\in Y:\ (x,y)\in E\},$$
$$E^y=\{x\in X:\ (x,y)\in E\}.$$

引理7.3 若 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 则

$$\forall x\in X,\ E_x\in\mathcal{B};\quad \forall y\in Y,\ E^y\in\mathcal{A}.$$

证 定义

$$\mathcal{F}=\{E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}:\ \forall x\in X, E_x\in\mathcal{B}\}.$$

那么 $\mathcal{F}\supset\mathcal{R}$.

显然 $\emptyset\in\mathcal{F}$, $X\times Y\in\mathcal{F}$.

设 $E_n\in\mathcal{F}$, $n\in\mathbb{N}$, 则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x\in\mathcal{B}.$$

可见， $\mathcal{F}$ 对可列并封闭，若 $E\in\mathcal{F}$, 则

$$(E^c)_x=(E_x)^c\in\mathcal{B}.$$

可见 $\mathcal{F}$ 对余运算封闭.

因此，$\mathcal{F}$ 是 σ 代数. 既然 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 是包含 $\mathcal{R}$ 的最小 σ 代数，那么 $\mathcal{F}\supset\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. □

引理7.4 设 f 是定义在 $X\times Y$ 上的广义实值的 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数，那么

(1) $\forall x\in X$, 作为 Y 上的函数 $f(x,\cdot)$ 是 $\mathcal{B}$ 可测的；

(2) $\forall y\in Y$, 作为 X 上的函数 $f(\cdot,y)$ 是 $\mathcal{A}$ 可测的.

证 只证 (1). 设 f 是 $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 的特征函数 $\chi_E(x,y)$, 那么. $\forall x\in X$, $\chi_E(x,y)=\chi_{E_x}(y)$. 据引理 7.3, $E_x\in\mathcal{B}$, 从而 $\chi_{E_x}(y)$ 是 $\mathcal{B}$ 可测的. 进而对于简单函数，引理的结论成立.

由于可测函数必为简单函数列之极限，故引理获证. □

引理7.5 设 μ,ν 是完全的, 将 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 中形如 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_{i,j}(E_{ij}\in\mathcal{R})$ 的集的全体记作 $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$. 若 $E\in\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ 且 $\mu\times\nu(E)<\infty$, 则

(1) 函数 $\Gamma_E(x)\widehat{=}\nu(E_x)$ 是 $\mathcal{A}$ 可测的；

(2) 函数 $\Gamma^E(y)\widehat{=}\mu(E^y)$ 是 $\mathcal{B}$ 可测的；

(3) $(\mu\times\nu)(E)=\int_Y\mu(E^y)\,d\nu(y)=\int_X\nu(E_x)\,d\mu(x)$.

证 若 $E\in\mathcal{R}$, 结论是对的. 把一切能表为 $\mathcal{R}$ 中元的可数并的集的全体记为 $\mathcal{R}_\sigma$. 设 $E\in\mathcal{R}_\sigma$, $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, $E_j\in\mathcal{R}$. 我们可以认为 $E_i\cap E_k=\emptyset(i\neq k)$. 由于

$$\nu(E_x)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu\big((E_j)_x\big),$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_X\nu(E_x)\,d\mu&=\sum_{j=1}^{\infty}\int_X\nu\big((E_j)_x\big)\,d\mu\\&=\sum_{j=1}^{\infty}(\mu\times\nu)(E_j)=(\mu\times\nu)(E)\end{aligned}$$

所以结论对 $E \in \mathcal{R}_\sigma$ 成立.

设 $E \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ 且 $(\mu \times \nu)(E) < \infty$. 那么

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j, \quad E_j \in \mathcal{R}_\sigma.$$

可认为 $E_j \supset E_{j+1}$, 且 $(\mu \times \nu)(E_1) < \infty$.

由于 $E_1 \in \mathcal{R}_\sigma$, 所以

$$(\mu \times \nu)(E_1) = \int_X \nu((E_1)_x)\, d\mu < \infty.$$

因此, $\nu((E_1)_x) < \infty$ μ–a.e. . 由于 $E_x = \bigcap_{j=1}^{\infty} (E_j)_x$, 所以

$$\nu(E_x) = \lim_{j\to\infty} \nu((E_j)_x) \qquad \mu - \text{a.e.}$$

(至少在使 $\nu((E_1)_x) < \infty$ 成立的点 x 处上式成立). 由于 μ 是完全测度, 所以

$$\Gamma_E(x) \widehat{=} \nu(E_x)$$

是 $\mathcal{A}$ 可测的. 由控制收敛定理

$$\begin{aligned}\int_X \nu(E_x)\, d\mu &= \lim_{j\to\infty} \int_X \nu((E_j)_x)\, d\mu \\ &= \lim_{j\to\infty} (\mu \times \nu)(E_j) = \mu \times \nu(E).\square\end{aligned}$$

注 引理 7.5 中的条件 $(\mu \times \nu)(E) < \infty$ 是不可少的. 有如下反例.

设

$$X = Y = [0,1],\ \mathcal{A} = \mathcal{B} = \big\{[0,1]\text{的寻常 Lebesgue 可测集}\big\}.$$

定义 $\mu = \nu$ 如下:

$$\mu(\{x\}) = \begin{cases} 2, & x \in A, \\ 1, & x \notin A, \end{cases}$$

其中 A 是 $[0,1]$ 的一个不可测子集，并且，μ 在空集上取零值．显然，μ 是完全的．令

$$D=\{(x,y)\in[0,1]^2:\ x=y\},$$
$$I_{n,k}=[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}],k=1,2,\cdots,n,\ n\in\mathbb{N}.$$

那么

$$D=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{n}(I_{n,k}\times I_{n,k})\in\mathcal{R}_{\sigma\delta}.$$

很明显，$\mu\times\nu(D)=\infty$. 然而我们看到

$$\nu(D_x)=\chi_A(x)+1=\Gamma_D(x)$$

不是可测的．

引理7.6 设 μ 和 ν 是完全的，$E\in\mathcal{M}$ 且 $(\mu\times\nu)(E)<\infty$. 那么存在 $A_0\in\mathcal{A}$, 使得当 $x\in X-A_0$ 时 $E_x\in\mathcal{B}$, 且函数

$$\Gamma_E(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x\in A_0\\ \nu(E_x), & \text{当}x\in X-A_0\end{cases}$$

是 $\mathcal{A}$ 可测的．并且

$$(\mu\times\nu)(E)=\int_X\Gamma_E(x)\,d\mu(x)$$

证 根据 $\mu\times\nu$ 的定义，存在 $F\in\mathcal{R}_{\sigma\delta}, F\supset E$ 且 $(\mu\times\nu)(F)=(\mu\times\nu)(E)$. 记 $G=F-E$. 则 $(\mu\times\nu)(G)=0$. 对于 G, 存在 $H\in\mathcal{R}_{\sigma\delta}$, 使 $G\subset H$ 且 $(\mu\times\nu)(H)=0$. 由引理 7.5, $\nu(H_x)$ 是 $\mathcal{A}$ 可测的且

$$(\mu\times\nu)(H)=\int_X\nu(H_x)\,d\mu(x).$$

因此 $\nu(H_x)=0$ μ–a.e.. 设 $A_0=\{x\in X:\ \nu(H_x)\neq 0\}$. 那么 $\mu(A_0)=0$.

由于 $G_x \subset H_x$, 所以当 $x \in X - A_0$ 时， G_x 为 ν 零集之子集. 由 ν 之完全性知，当 $x \in X - A_0$ 时， G_x 为 ν 零集. 根据引理 7.5, $F_x \in \mathcal{B}$. 所以

$$\forall x \in X - A_0, \quad E_x = F_x - G_x \in \mathcal{B}.$$

且引理所述之函数 Γ_E 是 $\mathcal{A}$ 可测的. 再用引理 7.5 得

$$\begin{aligned}\int_X \Gamma_E(x)\, d\mu(x) &= \int_{X-A_0} \nu(E_x)\, d\mu \\ &= \int_X \nu(F_x)\, d\mu = (\mu \times \nu)(E).\Box\end{aligned}$$

定理7.7 (Fubini) 设 μ, ν 是完全的且 $f \in L(X \times Y, \mathcal{M}, \mu \times \nu)$, 那么

(i) 对于几乎每个 $x \in X$, $f(x, \cdot)$ 是 $\mathcal{B}$ 可测的；

(ii) $\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$;

(iii) $\int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)$.

证 由引理 7.6 知，若 $E \in \mathcal{M}$, $(\mu \times \nu)(E) < \infty$, 则

$$\int_Y \chi_E(x,y)\, d\nu(y) = \nu(E_x) \quad \mu - \text{a.e.},$$

且

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \mu \times \nu(E) = \int_{X\times Y} \chi_E\, d(\mu \times \nu).$$

可见定理的结论对特征函数 χ_E 成立，从而对非负可积简单函数成立.

由于非负可积函数是可积的非负简单函数的单调增极限，故 (用 Levi 定理知) 定理对于非负可积函数成立，从而对一切可积函数成立. □

定理7.8 (Tonelli) 设 μ, ν 是完全的且是 σ 有限的. 若 f 是 $X \times Y$ 上的非负 $\mathcal{M}$ 可测函数，则

(i) 对几乎每个 x, $f_x(y) \hat{=} f(x,y)$ 是 $\mathcal{B}$ 可测的；

(ii) $\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ 是 $\mathcal{A}$ 可测的；

(iii) $\int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)$.

证 由于 μ 和 ν 都是 σ 有限的，所以 $\mu\times\nu$ 也是 σ 有限的. 那么非负 $\mathcal{M}$ 可测函数 f 可表为可积简单函数的单调增极限，于是定理如定理 7.7 一样地得到证明. □

引理7.9 若 μ 和 ν 是 σ 有限的，则对于 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 的每个集合，引理 7.5 的三条结论成立.

证 将一切使 7.5 的结论成立的 $\mu\times\nu$ 可测集 (意即 $\mathcal{M}$ 可测集) 收集起来记作 $\mathcal{F}$. 同引理 7.5 中证过的一样， $\mathcal{R}_\sigma \subset \mathcal{F}$.

先假定 μ, ν 都是有限的. 那么容易看到 $\mathcal{F}$ 对于单调极限运算封闭. 对于单调极限运算封闭的非空集族叫做 **单调类**. 那么， $\mathcal{F}$ 是单调类.

由于 $\mathcal{R}_\sigma \subset \mathcal{F}$, 根据 "单调类定理" (我们把单调类定理及其证明附在引理 7.9 的证明之后), $\mathcal{F}$ 包含着由 $\mathcal{R}$ 生成的 σ 代数，即 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

设 μ 和 ν 是 σ 有限的. 那么可令 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, 诸 X_i 两两不交且 $\mu(X_i)\in\mathbb{R}$; 亦可令 $Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$, 诸 Y_j 两两不交且 $\nu(Y_i)\in\mathbb{R}$. 那么

$$X\times Y = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} X_i\times Y_j,$$

诸 $X_i\times Y_j$ 两两不交. $\forall E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 令 $E_{i,j} = E\cap(X_i\times Y_j)$. 对 $E_{i,j}$ 用已证之结果，然后合起来便得欲证者. □

附 单调类定理及其证明.

在定义 1.1 中曾经定义了 σ 环. 我们把对于差运算及有限并运算封闭的非空集族叫作环. 那么， σ 环是对于可数并运算封闭的

环.

单调类定理 设 $\mathcal{R}$ 是环，$\sigma_r(\mathcal{R})$ 是 $\mathcal{R}$ 生成的 σ 环，$\mathcal{M}(\mathcal{R})$ 是 $\mathcal{R}$ 生成的单调类. 那么

$$\sigma_r(\mathcal{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{R}).$$

证 由于 $\sigma_r(\mathcal{R})$ 也是单调类，所以

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \sigma_r(\mathcal{R}).$$

对于 $A \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, 定义

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{R}) : \ B \cup A, \ B - A, \ A - B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}$$

显然，$\mathcal{M}_A$ 为单调类. 易见 $B \in \mathcal{M}_A \iff A \in \mathcal{M}_B$.

若 $A \in \mathcal{R}$, 则因 $\mathcal{R}$ 是环，必有 $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_A$, 进而 $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_A$. 所以，对于每个 $B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, 有 $B \in \mathcal{M}_A$, 即 $A \in \mathcal{M}_B$. 由于 A 是 $\mathcal{R}$ 的任意元，所以 $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_B$, 进而 $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_B$. 这就意味着 $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ 是一个环，从而是 σ 环. 于是

$$\sigma_r(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{R}).\square$$

定理7.10 (Fubini-Tonelli) 设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个 σ 有限测度空间，设 f 是 $X \times Y$ 上的广义实值 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 可测函数. 若 f 是可积的或者非负的，则

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f \, d\mu \right) d\nu = \int_X \left(\int_Y f \, d\nu \right) d\mu.$$

证 用引理 7.9, 知定理对特征函数从而对简单函数成立，过渡到极限便完成了定理的证明. □

习 题

1. 设 $X = Y = [0,1]$,$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ 是一个包含 X 的一切开集的 σ 代数. 证明 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 包含 $X \times Y$ 的一切开集.
2. 设 $f \in L(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L(Y, \mathcal{B}, \nu)$, 证明 $f(x)g(y) \in L(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ 且
$$\int f(x)g(y)\, d(\mu \times \nu) = \int f\, d\mu \cdot \int g\, d\nu.$$
3. 对于 $x > 0$, 有 $\int_{(0,\infty)} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$. 利用此事, 根据 Fubini 定理证明
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$
4. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的非负实值函数. 考虑寻常 Lebesgue 测度. 证明 f 可测的充要条件是 $E = \{(x,y):\ 0 \le y \le f(x)\}$ 属于 $\mathbb{R}^2$ 中由可测矩形族生成的 σ 代数.
5. 如题 4, 设 f 是可积的, 用 μ 表寻常 Lebesgue 测度. 证明
$$\mu \times \mu(E) = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu.$$
6. 设 $1 \le p < \infty$, 考虑寻常 Lebesgue 测度. 设 f 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上可测. 证明
$$\left\{ \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} |f(x,y)|\, dy \right)^p dx \right\}^{1/p} \le \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} |f(x,y)|^p\, dx \right)^{1/p} dy.$$
7. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可测集, μ 是 Lebesgue 测度. 证明 $\{(x,y):\ x - y \in E\}$ 是 $\mu \times \mu$ 可测的. 据此证明, 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可测, 则 $f(x-y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 可测.

提示：先考虑 E 是开集然后 G_δ 集，零集.

8. 设 f, g 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可积函数 (可以是复值的) 用 Tonelli 定理证明

$$(f * g)(x) \widehat{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy$$

是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可积函数. $f * g$ 叫作 f 与 g 的卷积.

9. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可积函数. 定义 f 的 Fourier 变换为 (复值函数)

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} f(x)\, dx.$$

证明：

(1) $\widehat{f} \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ 且 $\lim_{t \to \infty} \widehat{f}(t) = 0$;

(2) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$;

(3) $\widehat{f} = \widehat{g} \Longrightarrow f = g$ a.e.

第二章　测度与拓扑

这一章，我们要研究局部紧的 Hausdorff 拓扑空间上的测度与积分. 显然，大学“实变”课程中某些涉及拓扑的内容，只能在拓扑空间上作推广. 例如，可测集可以用开集或紧集来逼近. 对于拓扑空间，是否有类似的结论，这就是我们在这一章里要研究的. 另外，拓扑空间上的函数，最重要的是连续函数. 因此，我们将在 §2 中研究局部紧的 Hausdorff 空间上的连续函数，在 §3 中，我们研究 $C_C(X)$ 空间上线性泛函同拓扑空间上测度的关系，这是联系泛函分析同测度论之间的重要纽带，在 §4 中，我们要把 $\mathbb{R}^n$ 中的关于可测函数构造的 Лузин 定理推广到局部紧的 Hausdorff 拓扑空间上去. 在 §5, 简单介绍测度的 Radon 乘积. 当研究拓扑群上的分析问题时， Haar 测度的概念是重要的. §6 将对此做一基本的介绍.

§1. 拓扑空间及连续映射

这一节的宗旨并非系统地介绍拓扑空间的基础知识，而仅仅是简单地介绍一下本章要用到的关于拓扑空间的某些必要知识，并给出连续映射的定义，证明 Урысон 的关于连续函数的延拓定理.

定义1.1 设 X 是一个不空的集合. 所谓 X 上的一个拓扑，是指 X 的一个子集族 $\mathcal{T}$, 它满足以下三个条件：

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;

(ii) 若 $\{U_\alpha\} \subset \mathcal{T}$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha \in \mathcal{T}$;

(iii) 若 $\{U_i:\ i = 1, \cdots, m\} \subset \mathcal{T}$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} U_i \in \mathcal{T}$.

定义1.2 若 $\mathcal{T}$ 为 X 上的拓扑，则 $(X,\mathcal{T})$ 叫做拓扑空间．通常，在拓扑 $\mathcal{T}$ 已被理解的情况下，$(X,\mathcal{T})$ 可简记作 X．$\mathcal{T}$ 中的元素叫做 X 的开集；开集的余集叫做闭集．设 $A \subset X$，

$$\mathring{A} = \bigcup_{V \subset A, V \in \mathcal{T}} V$$

叫做 A 的内部．换言之，$\mathring{A}$ 是一切含在 A 内的开集之并集．设 $A \subset X$，

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F^c \in \mathcal{T}} F$$

叫做 A 的闭包．换言之，$\overline{A}$ 是一切包含 A 的闭集之交集．如果存在一族开集 $\{V_\alpha\}$，使得

$$\bigcup_{\alpha} V_\alpha \supset A$$

则称 $\{V_\alpha\}$ 为 A 的开复盖．如果 A 的任一开复盖总有一个有限的子复盖，则称 A 为紧致集，简称为紧集．如果 X 自己是紧集，则称 X 为紧致拓扑空间，简称为紧空间．

显然，紧集的闭子集也是紧集，单点集永远是紧集，但不一定是闭集．

定义1.3 设 $\{X,\mathcal{T}\}$ 是拓扑空间，Y 是 X 的非空子集．定义 $\mathcal{T}' = \{G \cap Y:\ \ G \in \mathcal{T}\}$．那么，$(Y,\mathcal{T}')$ 是拓扑空间，叫做 $(X,\mathcal{T})$ 的子空间．$\mathcal{T}'$ 叫做 $\mathcal{T}$ 的子拓扑．

定义1.4 设 X 为拓扑空间，如果对于 X 中任意不同的两点 $x \neq y$，必存在开集 U 和 V，使得 $x \in U$, $y \in V$，以及 $U \cap V = \emptyset$，则称 X 为 Hausdorff 空间，或 T_2 空间．定义中所述的性质叫做第二类分离性，常叫做 T_2 公理．

由定义可知，在 Hausdorff 空间中，紧集一定是闭集．当然，单点集一定是闭集；

关于 Hausdorff 空间，有如下一个重要的性质：它的任意一对互不相交的紧集能被一对互不相交的开集所分离. 即成立下述定理 1.1.

定理1.1 设 X 为 Hausdorff 空间， K 和 L 为 X 的紧集，且 $K\cap L=\emptyset$. 那么，存在两开集 U 和 V, 使得

$$K\subset U,\quad L\subset V,\quad U\cap V=\emptyset.$$

证 不妨设 K 和 L 均为非空的 (否则，如设 $K=\emptyset$, 则取 $U=\emptyset$, $V=X$, 即可证得结论). 以下分两种情形考虑：

(i) 设 $K=\{x\}$ (即 K 仅含一个点). 由 X 的可分离性，对任一 $y\in L$, 必存在开集 U_y 和 V_y, 使得 $x\in U_y$, $y\in V_y$, 且 $U_y\cap V_y=\emptyset$. 由于 L 为紧集，故可从 $\{V_y:\ y\in L\}$ 中选出有限个开集 V_{y_i}, $i=1,\cdots,m$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}V_{y_i}\supset L$. 现在，取 $U=\bigcap\limits_{i=1}^{m}U_{y_i}$ 及 $V=\bigcup\limits_{i=1}^{m}V_{y_i}$, 则 U 和 V 便满足定理的要求.

(ii) 设 K 为紧集. 对每个 $x\in K$, 由 (i), 有开集 U_x 和 V_x, 使得

$$x\in U_x,\ L\subset V_x,\quad U_x\cap V_x=\emptyset.$$

由于 K 为紧集，故可从 $\{U_x:\ x\in K\}$ 中选取有限个开集 U_{x_j}, $j=1,\cdots,s$, 使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{s}U_{x_j}\supset K$. 现在取 $U=\bigcup\limits_{j=1}^{s}U_{x_j}$, 及 $V=\bigcap\limits_{j=1}^{s}V_{x_j}$, 则 U 和 V 便满足定理的要求. □

推论1.2 设 X 为 Hausdorff 空间. 若 K 为 X 的紧集， U_1 和 U_2 为 X 的开集，且 $K\subset U_1\cup U_2$, 则存在紧集 K_1 和 K_2, 使得 $K_1\subset U_1$, $K_2\subset U_2$, 以及 $K=K_1\cup K_2$.

证 记 $L_1=K\backslash U_1$, 及 $L_2=K\backslash U_2$. 显然， L_1 和 L_2 均为紧集，且 $L_1\cap L_2=\emptyset$. 于是，由定理 1.1, 有开集 V_1 和 V_2, 使得 $L_1\subset V_1$, $L_2\subset V_2$, 及 $V_1\cap V_2=\emptyset$. 定义 $K_1=K\setminus V_1$, 及 $K_2=K\setminus V_2$. 显然， K_1 和 K_2 均为紧集，且由包含关系

$$K_1=K\setminus V_1=K\cap V_1^c\subset K\cap L_1^c=K\cap(K\cap U_1^c)^c=K\cap U_1$$

可知 $K_1 \subset U_1$. 同理有 $K_2 \subset U_2$. 最后，包含关系

$$K = (K \setminus V_1) \cup (K \cap V_1) \subset (K \setminus V_1) \cup (K \cap V_2^c) = K_1 \cup K_2$$

蕴含着 $K = K_1 \cup K_2$. □

定义1.5 设 X 为拓扑空间. 如果 X 的任意一对互不相交的闭集总能被一对互不相交的开集所分离，即若 A, B 为闭集且 $A \cap B = \emptyset$, 则存在开集 U, V, 使得 $A \subset U, B \subset V$, 且 $U \cap V = \emptyset$, 那么， X 叫做正规的拓扑空间. 上述分离性叫做第四类分离性，常称为 T_4 公理.

推论1.3 紧的 Hausdorff 空间是正规的.

证 由于紧拓扑空间中的闭集也是紧集，故结论由定理 1.1 直接推得. □

下面，我们引入拓扑空间上连续映射的概念.

定义1.6 设 X 和 Y 为拓扑空间，映射 $f:\ X \to Y$, 称为连续的，是指对任一开集 $V \subset Y$, V 的原象 $f^{-1}(V)$ 为 X 的开集. 或者等价地说，对任一闭集 $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ 为 X 的闭集. 当 $Y = \mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$) 时，映射又叫实 (或复) 函数. X 上的连续函数的全体记做 $\mathrm{C}(X)$.

定理1.4 (Урысон 引理) 设 X 为正规的拓扑空间， E 和 F 为 X 的闭集，且 $E \cap F = \emptyset$, 则存在一连续函数 $f:\ X \to [0,1]$, 使得

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ 1, & x \in F. \end{cases}$$

证 记 D 为 $(0,1)$ 中二进有理数的全体，即

$$D = \{\frac{m}{2^n}\ :\ m < 2^n;\ m, n \in \mathbb{N}\}.$$

由 X 的正规性，有开集 $U_{\frac{1}{2}}$ 和 $U'_{\frac{1}{2}}$, 使得

$$E \subset U_{\frac{1}{2}},\ F \subset U'_{\frac{1}{2}},\ U_{\frac{1}{2}} \cap U'_{\frac{1}{2}} = \emptyset.$$

显然 $\overline{U}_{\frac{1}{2}} \cap U'_{\frac{1}{2}} = \emptyset$. 于是,

$$E \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset F^c.$$

对 E 和 $U^c_{\frac{1}{2}}$ 再使用 X 的正规性, 有开集 $U_{\frac{1}{4}}$ 和 $U'_{\frac{1}{4}}$ 使得

$$E \subset U_{\frac{1}{4}},\ U^c_{\frac{1}{2}} \subset U'_{\frac{1}{4}},\ U^c_{\frac{1}{4}} \cap U'_{\frac{1}{4}} = \emptyset.$$

那么, 有

$$E \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset \left(U^c_{\frac{1}{2}}\right)^c = U_{\frac{1}{2}}.$$

对 $\overline{U}_{\frac{1}{2}}$ 和 F 使用 X 的正规性, 有开集 $U_{\frac{3}{4}}$ 和 $U'_{\frac{3}{4}}$, 使得

$$\overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}},\ F \subset U'_{\frac{3}{4}},\ U_{\frac{3}{4}} \cap U'_{\frac{3}{4}} = \emptyset.$$

类似地, 有

$$\overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset F^c.$$

综合以上, 我们得到

$$E \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subset F^c.$$

依此类推, 得到一列开集 $\{U_r\}_{r\in D}$, 满足

$$E \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset U_s \subset \overline{U}_s \subset F^c \quad (r, s \in D;\ r < s).$$

定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \bigcup\{U_r:\ r \in D\}; \\ \inf\{r:\ x \in U_r\}, & x \in \bigcup\{U_r:\ r \in D\}. \end{cases}$$

则 f 显然满足

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ 1, & x \in F. \end{cases}$$

余下，只须证明 f 在 X 上连续. 由定义 1.5 以及 $\mathbb{R}$ 中开集的构造，只须证明：对任一 $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha,\beta))$ 为 X 的开集. 事实上，我们只须证明：对任一 $(\alpha,\infty)\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha,\infty))$ 为 X 的开集以及对任一 $(-\infty,\beta)\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty,\beta))$ 为 X 的开集. 我们只给出前一断言的证明.

不妨设 $0\le\alpha<1$. 我们知道，$f(x)>\alpha$ 的等价条件是存在某一 $r\in D$, $r>\alpha$, 使得 $x\notin U_r$. 而当 $s\in D, r\in D, s<r$ 时 $\overline{U}_s\subset U_r$. 所以，$f(x)>\alpha$ 等价于存在某一 $s\in D, s>\alpha$, 使得 $x\notin\overline{U}_s$. 于是，$f(x)>\alpha$ 等价于

$$x\in\bigcup\{\overline{U}_s^c:\quad s>\alpha, s\in D\}.$$

因此，

$$f^{-1}((\alpha,\infty))=\bigcup\{\overline{U}_s^c:\quad s\in D, s>\alpha\}$$

为 X 的开集. □

定理1.5 (Урысон 延拓定理) 设 X 是正规的拓扑空间，F 是 X 的闭子集，φ: $F\to\mathbb{R}$ 是有界连续函数. 那么存在有界连续函数 f: $X\to\mathbb{R}$ 满足：

$$\forall x\in F,\ f(x)=\varphi(x);$$
$$\sup\{|f(x)|:\ x\in X\}=\sup\{|\varphi(x)|:\ x\in F\}.$$

证 记 $\mu_0=\sup\{|\varphi(x)|:\ x\in F\}$, 并认为 $\mu_0>0$. 记 $\varphi_0=\varphi$. 定义

$$A_0=\{x:\ x\in F,\ \varphi_0(x)\le-\frac{\mu_0}{3}\}$$
$$B_0=\{x:\ x\in F,\ \varphi_0(x)\ge\frac{\mu_0}{3}\}$$

由于 $\varphi_0\in C(F)$, F 是 X 的闭集，所以 A_0, B_0 是 X 的闭集，且 $A_0\cap B_0=\emptyset$. 据定理 1.4, 存在 $f_0\in C(X)$, 使

$$f_0(X)\subset[\frac{-\mu_0}{3},\frac{\mu_0}{3}],\ f_0(A_0)=\{\frac{-\mu_0}{3}\},\ f_0(B_0)=\{\frac{\mu_0}{3}\}.$$

在 F 上定义 $\varphi_1 = \varphi_0 - f_0$, 则 $\varphi_1 \in \mathrm{C}(F)$ 且

$$\sup |\varphi_1|(F) \overset{\text{def}}{=} \mu_1 \le \frac{2}{3}\mu_0.$$

定义

$$A_1 = \left\{x:\ x \in F,\ \varphi_1(x) \le -\frac{\mu_1}{3}\right\},$$
$$B_1 = \left\{x:\ x \in F,\ \varphi_1(x) \ge \frac{\mu_1}{3}\right\}.$$

并取 $f_1 \in \mathrm{C}(X)$ 使

$$f_1(X) \subset \left[\frac{-\mu_1}{3}, \frac{\mu_1}{3}\right],\ f_1(A_1) = \left\{\frac{-\mu_1}{3}\right\},\ f_1(B_1) = \left\{\frac{\mu_1}{3}\right\}.$$

在 F 上定义 $\varphi_2 = \varphi_1 - f_1$. 则 $\varphi_2 \in \mathrm{C}(F)$ 且

$$\sup |\varphi_2|(F) \overset{\text{def}}{=} \mu_2 \le \frac{2}{3}\mu_1.$$

重复上述步骤永无休止，得到 F 上的连续函数列 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, 和 X 上的连续函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足：

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - f_n(x), \quad x \in F;$$
$$\mu_n = \sup |\varphi_n|(F);$$
$$\sup |f_n|(X) \le \frac{1}{3}\mu_n, \quad \mu_{n+1} \le \frac{2}{3}\mu_n,$$

其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$. 于是

$$\sup |\varphi_n|(F) \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0,$$
$$\sup |f_n|(X) \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0.$$

在 X 上定义

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

则

$$|S_n(x) - S_{n+m}(x)| \le \sum_{k=1}^{m} |f_{n+k}(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

可见 $\{S_n\}$ 在 X 上一致收敛. 定义

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

则 f 在 X 上连续且

$$\begin{aligned}\sup|f|(X) &\le \sum_{n=0}^{\infty} \sup|f_n|(X)\\ &\le \frac{1}{3}\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \mu_0.\end{aligned}$$

对于 $x \in F$, 有

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \big[\varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x)\big] = \varphi_0(x) - \varphi_{n+1}(x).$$

所以

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \varphi_0(x) - \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(x) = \varphi_0(x), \quad (x \in F).$$

定理 1.5 证毕. □

§2. 局部紧的 Hausdorff 空间上的连续函数

定义2.1 拓扑空间 X 称为局部紧的，是指对任一 $x \in X$, 有开集 $U \ni x$, 且 $\overline{U}$ 为紧集.

显然, $\mathbb{R}^n$ 为一局部紧的 Hausdorff 空间 (依 Euclid 拓扑). 此外，紧的 Hausdorff 空间也是局部紧的. 为书写简便起见，我们

将局部紧的 Hausdorff 空间记作 LCHS(Locally compact Hausdorff space). LCHS 有如下的重要性质.

定理2.1 设 X 为 LCHS, 紧集 $K \subset X$, 开集 $U \subset X$, 且 $K \subset U$. 那么存在一开集 $V \subset X$, 使得 $\overline{V}$ 为紧集，且 $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

证 分两种情形来考虑.

(i) $K = \{x\}$(即 K 仅包含一个点). 由定义 2.1, 有开集 $W \ni x$, 且 $\overline{W}$ 为紧集，不妨设 $W \subset U$(否则，以 $W \cap U$ 代替 W 即可). 对 $K = \{x\}$ 和 $L = \overline{W} \setminus W$ 使用定理 1.1, 有开集 V_1 和 V_2, 使得 $K \subset V_1$, $L \subset V_2$, 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. 如取 $V = V_1 \cap W$, 则易证 V 便满足定理的要求. 事实上，包含关系 $\overline{V} \subset U$ 可由以下两列关系式推出：

$$V_1 \subset V_2^c \Longrightarrow \overline{V}_1 \subset V_2^c \Longrightarrow \overline{V} \subset V_2^c \subset L^c,$$
$$\overline{V} \subset \overline{W} = L \cup W.$$

(ii) K 为 X 的紧集. 由已证的 (i) 可知：对任一 $x \in K$, 有开集 V_x, 使得 $\overline{V}_x$ 为紧集，且 $\overline{V}_x \subset U$. 再由 K 的紧性，可从 $\{V_x:\ x \in K\}$ 中选出有限个 V_{x_i}, $i = 1, \cdots, m$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{x_i} \supset K$. 显然，如取 $V = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{x_i}$, 则 V 便满足定理的要求. □

设 X 为 LCHS, 并记

$$\mathrm{C_c}(X) = \{f \in \mathrm{C}(X):\ \mathrm{supp}\, f 为紧集\}$$

其中 $\mathrm{supp}\, f = \overline{\{x \in X:\ f(x) \neq 0\}}$ 叫做 f 的支撑集, 简称为支集.

下述定理是 Урысон 引理在 LCHS 中的推广.

定理2.2 设 X 为 LCHS, K 为 X 的紧集，U 为 X 的开集，且 $K \subset U$. 那么存在一 $f \in \mathrm{C_c}(X)$, 使得 $\chi_K(x) \leq f(x) \leq \chi_U(x)$, 以及 $\mathrm{supp}\, f \subset U$, 其中 χ_E 表示集 E 的特征函数.

证 由定理 2.1, 有开集 V, 使得 $\overline{V}$ 为紧集，且

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

由推论 1.3,$\overline{V}$ 是正规的 Hausdorff 空间 (作为 X 的子空间). 因此，由定理 1.4, 有 $\overline{V}$ 上的连续函数 $g: \overline{V} \longrightarrow [0,1]$, 使得

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \in \overline{V} \setminus V. \end{cases}$$

现在，定义

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \overline{V}, \\ 0, & x \in X \setminus \overline{V}. \end{cases}$$

不难证明：f 为 X 上的连续函数. 事实上，任取闭集 $E \subset [0,1]$. 当 $0 \notin E$ 时，$f^{-1}(E) = g^{-1}(E)$, 当 $0 \in E$ 时，$f^{-1}(E) = g^{-1}(E) \cup V^c$. 于是，不论何种情形，$f^{-1}(E)$ 均为闭集. 因此，f 在 X 上连续. 此外，由 $K \subset \operatorname{supp} f \subset \overline{V} \subset U$, 以及 $0 \le f(x) \le 1$ 便推得 $\chi_K(x) \le f(x) \le \chi_U(x)$. □

定理2.3 设 X 为一 LCHS, $f \in C_c(X)$, 以及 $\operatorname{supp} f \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$, 其中每一 U_i 为 X 的开集. 那么存在 $f_i \in C_c(X)$, $1 \le i \le m$, 使得 $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i$, 以及 $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ $(1 \le i \le m)$. 此外，若 $f \ge 0$, 则 $f_i \ge 0$ $(1 \le i \le m)$.

证 不妨只考虑 $m = 2$ 的情形. 由推论 1.2, 有紧集 K_1 和 K_2, 使得

$$K_1 \subset U_1,\ K_2 \subset U_2,\ supp\, f = K_1 \cup K_2.$$

再由定理 2.2, 有函数 $h_i \in C_c(X)$ $(i = 1,2)$, 使得

$$\chi_{K_i}(x) \le h_i(x) \le \chi_{U_i}(x), \quad supp\, h_i \subset U_i \ (i = 1,2).$$

现在，定义

$$g_1 = h_1, \quad g_2 = h_2 - \min(h_1, h_2).$$

那么， $g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, \operatorname{supp} g_1 \subset U_1$, 并且 $\operatorname{supp} g_2 \subset U_2$. 易证

$$g_1 + g_2 = \max(h_1, h_2).$$

因此，当 $x \in \operatorname{supp} f = K_1 \cup K_2$ 时， $g_1(x) + g_2(x) = 1$. 取

$$f_1 = fg_1, \quad f_2 = fg_2.$$

那么， f_1 和 f_2 便满足定理的要求． □

下述定理是 Урысон 延拓定理在 LCHS 中的推广.

定理2.4 (Tietze 延拓定理) 设 X 为 LCHS, 且 K 为 X 的紧集. 若 $f \in \mathrm{C}(K)$, 则存在 $\varphi \in \mathrm{C_c}(X)$, 使得 φ 在 K 上的限制 $\varphi|_K = f$.

证 由定理 2.2 知，存在 $g \in \mathrm{C_c}(X)$ 使得 $\chi_K \leq g \leq 1$. 记 $F = \operatorname{supp} g$. 那么 F 是 X 的紧集.

作为 X 的子空间， F 是紧致的，从而是正规的. 在子空间 F 上使用定理 1.5, 知有 $h \in \mathrm{C}(F)$, 使 $h|_K = f$. 定义 X 上的函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x)h(x) = (gh)(x), & \text{当} x \in F \\ 0, & \text{当} x \in X - F. \end{cases}$$

那么， $\varphi|_K = f, \operatorname{supp}\varphi \subset F$.

设 E 是 $\mathbb{R}$ 的闭集. 显然， $gh \in \mathrm{C}(F), (gh)^{-1}(E)$ 是 F 的闭子集，从而是 X 的闭子集.

当 $0 \notin E$ 时， $\varphi^{-1}(E) = (gh)^{-1}(E)$ 是 F 的闭子集，是 X 的闭集.

当 $0 \in E$ 时,

$$\varphi^{-1}(E) = (gh)^{-1}(E) \cup \varphi^{-1}(\{0\}),$$

其中 $(gh)^{-1}(E)$ 是 F 的闭集. 而

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = F^c \cup g^{-1}(\{0\}) \cup h^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\}) \cup h^{-1}(\{0\}),$$

其中 $g^{-1}(\{0\})$ 是 X 的闭集， $h^{-1}(\{0\})$ 是 F 的闭集，从而也是 X 的闭集. 所以 $\varphi^{-1}(\{0\})$ 是 X 的闭集. 那么 $\varphi^{-1}(E)$ 是 X 的闭集.

可见 $\varphi \in \mathrm{C_C}(X)$. □

为了后面 §5 的需要，我们还引进可数基的概念.

定义2.2 设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间， $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$. 如果任一 $A \in \mathcal{T}$, 皆可表示成 $\mathcal{U}$ 中元的并，则 $\mathcal{U}$ 叫做 $(X,\mathcal{T})$ 的基. 此外，若基 $\mathcal{U}$ 是可数集，那么就称 X 为具有可数基 $\mathcal{U}$ 的拓扑空间.

注 我们把势不超过 $\aleph_0$ 的集叫作 **可数集**. 也就是说，空集，有限集，以及与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集叫作可数集.

定理2.5 设 X 为 LCHS. 若 X 有可数基 $\mathcal{U}$, 则 X 的每一开集可表示成可数个紧集的并集.

证 设 U 为 X 的开集. 任取 $x \in U$. 由定理 2.1 可知存在开集 V, 使得

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U, \quad \text{且}\overline{V}\text{为紧集}.$$

由 $\mathcal{U}$ 的定义，必存在 $U_x \in \mathcal{U}$, 使得 $x \in U_x \subset V$. 此时，自然 $\overline{U_x}$ 也是紧集. 显然集合 $\{U_x:\ x \in U\}$ 是可数集 $\mathcal{U}$ 的一个子集，而

$$U \subset \bigcup \left\{\overline{U_x}:\ x \in U\right\} \subset U.$$

可见， U 是可数个紧集的并集. □

注 1 以后我们说 X 具有可数基 $\mathcal{U}$, 总不妨认为 $X \in \mathcal{U}$. 否则，将 X 添加进 $\mathcal{U}$ 中，仍得一可数基.

注 2 定理 2.5 的结论表明：在定理 2.5 的条件下， X 的任一开集为 F_σ 型集.

§3. Radon 测度与 Riesz 表现定理

定义3.1 设 X 是 Hausdorff 空间. 由 X 的开集族所生成的 σ

代数叫做 X 上的 Borel 代数，记作 $\mathcal{B}(X)$. $\mathcal{B}(X)$ 的元叫作 X 的 Borel 集.

定义3.2 $\mathcal{B}(X)$ 上的测度，如果在每个紧集上都取有限值，就叫作 X 上的 Borel 测度.

注 这里，与 [2] 不同，我们把在紧集上取有限值作为 Borel 测度满足的前提条件. 这个限制并不强，却将给我们的叙述带来一些方便.

定义3.3 设 X 和 Y 是 Hausdorff 空间，映射 $f: X \longrightarrow Y$ 称为 Borel 可测的，是指对于每个 $B \in \mathcal{B}(Y), f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$.

下述定理表明，在 Hausdorff 空间上的连续函数一定是 Borel 可测的. 当然 Borel 可测函数不必是连续的.

定理3.1 设 X 和 Y 是 Hausdorff 空间. 若映射 $f: X \longrightarrow Y$ 是连续的，则 f 也是 Borel 可测的.

证 由定义 1.5 知，当 U 为 Y 的开集时，$f^{-1}(U)$ 为 X 的开集，从而 $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X)$. 定义 $\mathcal{F} = \{B \subset Y: f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)\}$. 那么 $\mathcal{F}$ 包含 Y 的一切开集. 容易验证 $\mathcal{F}$ 是 Y 上的 σ 代数. 于是 $\mathcal{F} \supset \mathcal{B}(Y)$, 由此推出对任一 $B \in \mathcal{B}(Y)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$.□

定义3.4 设 $\mathcal{A}$ 为 Hausdorff 空间 X 上的 σ 代数且 $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ 上的测度 μ 叫做正则的，是指 μ 具有下述性质：

(a) 对任一紧集，$K \subset X$, $\mu(K) < \infty$;

任一 $A \in \mathcal{A}$ 满足 (b) $\mu(A) = \inf\{\mu(U): U\text{为开集}, U \supset A\}$;

任一开集 $U \subset X$ 满足 (c) $\mu(U) = \sup\{\mu(K): K\text{为紧集}, K \subset U\}$.

注 (b) 叫做外正则条件，(c) 叫做内正则条件.

定义3.5 $\mathcal{B}(X)$ 上的正则测度叫做 X 上的正则 Borel 测度，或者叫做 X 上的 Radon 测度.

定义 3.4 规定了 LCHS 上的 Borel 测度成为正则测度 (即 Radon 测度) 的条件. 如果限于讨论具有可数基的 LCHS 的话，那末下面将证明其上的 Borel 测度总是正则测度.

确言之，我们有下述定理.

定理3.2 设 X 为一具有可数基的 LCHS, μ 是 X 上的 Borel 测度. 那么，每个 Borel 集关于 μ 都是正则的 — 即满足定义 3.4 的条件 (b) 和 (c).

证 由定理 2.5, X 可表为

$$X = \bigcup_i K_i, \quad \text{每一 } K_i \text{ 为紧集}.$$

再由定理 2.1, 存在 X 的开集 V_i, 使得 $\overline{V}_i$ 为紧集且

$$K_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset X.$$

以上两式表明 $X = \bigcup_i V_i$, 且 $\mu(V_i) < \infty$.

设 $A \in \mathcal{B}(X)$. 对任一 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $\mu_n(A) = \mu(A \cap V_n)$. 显然 $\mu_n(A) < \infty$, 故 μ_n 为有限 Borel 测度. 下面先证明：如果每个 Borel 集关于 μ_n 满足 (b) 和 (c), 那末可由 μ_n 过渡到 μ 而证得定理的结论.

固定 $n \in \mathbb{N}$, 记 $\nu = \mu_n$. 定义

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(X) : A\text{是正则的}\}$$

其中， A 是正则的，指的是 A 关于 ν 满足定义 3.4 的 (b) 和 (c). 显然，每个开集 U 都属于 $\mathcal{A}$. 因为根据定理 2.5, U 可表为紧集的可数并. 下面验证 $\mathcal{A}$ 是 σ 代数，从而 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$.

先证明 $\mathcal{A}$ 对于余运算封闭. 设 $A \in \mathcal{A}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 开集 $G \supset A$ 及紧集 $K \subset A$, 使 $\nu(G - K) < \varepsilon$. 于是

$$\nu(K^c - G^c) = \mu(K^c \cap V_n - G^c \cap \overline{V}_n) < \varepsilon.$$

$K^c \cap V_n$ 是开集且 $\supset A^c$, $G^c \cap \overline{V}_n$ 是紧集且 $\subset A$. 这就证明了 $A^c \in \mathcal{A}$.

再证明 $\mathcal{A}$ 对于可列并运算封闭. 设 $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ 开集 $G_k \supset A_k$ 及紧集 $K_k \subset A_k$, 使

$$\nu(G_k - K_k) < \varepsilon 2^{-k}.$$

记 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$. 那么 $G \supset A \supset F$ 且

$$\nu(G - F) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(G_k - K_k) \leq \varepsilon.$$

由于 $\lim_{N\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{N} K_i\Big) = \nu(F)$, 而 $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ 是含于 A 的紧集, 所以上式表明 $A \in \mathcal{A}$.

现在回到测度 μ. 设 $E \in \mathcal{B}(X)$. $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists$ 开集 $G_n \supset E$ 及紧集 $K_n \subset E$, 使

$$\mu_n(G_n - K_n) < \varepsilon 2^{-n}.$$

令 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap V_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap V_n) = E$. 显然, G 是开集. 令 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. 则 $F \subset E$. 并且

$$\mu(G - F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \cap V_n - K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(G_n - K_n) < \varepsilon.$$

由于 F 是紧集的可数并, 上式表明, 无论 $\mu E < \infty$ 或者 $\mu E = \infty$, E 关于 μ 是正则的. □

下面, 我们设 X 是 LCHS. 我们来研究 X 上的 Radon 测度同 $C_C(X)$ 上的线性泛函之间的关系.

设 μ 是 Radon 测度．那么，映射

$$f \longrightarrow \int_X f\, d\mu$$

定义了 $C_c(X)$ 上的一个线性泛函．记之为 L. 显然，若 $f \in C_c(X)$, $f \geq 0$, 则 $L(f) \geq 0$.

定义3.6 设 X 为 LCHS. $C_c(X)$ 上的线性泛函 I 称为正的，是指 I 满足

$$I(f) \geq 0, \quad \forall f \in C_c(X), f \geq 0.$$

于是我们看到，每个 Radon 测度 μ 对应有一个正线性泛函 L, 使得

$$\forall f \in C_c(X),\ L(f) = \int_X f d\mu.$$

我们所关心的是相反的问题：

(1) $C_c(X)$ 上的正线性泛函是否一定具有形式 $f \longrightarrow \int_X f\, d\mu$? 其中 μ 为 X 上的 Radon 测度.

(2) 这个 Radon 测度 μ 如果存在，是否是唯一的？

后面的 Riesz 表现定理将肯定地回答这些问题.

定义3.7 记号：

$$f \prec U$$

表示 $0 \leq f \leq 1$, $f \in C_c(X)$, 且 $\operatorname{supp} f \subset U$; 并规定 $0 \prec \emptyset$.

引理3.3 设 X 为 LCHS, μ 为 X 上的 Radon 测度．若 U 为 X 的开集，则

$$\mu(U) = \sup\left\{ \int_X f\, d\mu:\ f \in C_c(X),\ f \prec U \right\}.$$

证 由不等式

$$\int_X f\, d\mu \leq \mu(\operatorname{supp} f) \leq \mu(U),$$

我们只须证明

$$\mu(U) \le \sup\left\{ \int_X f\,d\mu:\ f \in \mathrm{C_C}(X),\ f \prec U \right\}.$$

设 $\alpha < \mu(U)$. 由 μ 的正则条件 (c), 有紧集 $K \subset U$ 使得 $\alpha < \mu(K)$. 由定理 2.2, 存在 $f \in \mathrm{C_C}(X)$, 满足 $\chi_K \le f$ 且 $f \prec U$. 于是

$$\alpha < \mu(K) = \int_X \chi_K\,d\mu \le \int_X f\,d\mu.$$

因此

$$\alpha < \sup\left\{ \int_X f\,d\mu:\ f \in \mathrm{C_C}(X),\ f \prec U \right\}.$$

令 $\alpha \longrightarrow \mu(U)$, 便得要证的不等式. □

引理3.4 设 X 为 LCHS. 对于 X 的子集，定义集函数 μ^* 如下：

(α) 当 U 是 X 的开集，$\mu^*(U) = \sup\{I(f):\ f \in \mathrm{C_C}(X),\ f \prec U\}$,

(β) $\forall A \subset X$, $\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U):\ U为开集,\ U \supset A\}$.

那么，μ^* 为 X 上的外测度，且 X 的每个 Borel 子集都是 μ^* 可测的.

证 为证 μ^* 为 X 上的外测度，只须证明 μ^* 的可列次可加性：

$$\mu^*\Big(\bigcup_i A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

首先，让我们对任一列开集 $\{U_i\}$, 证明上面的不等式成立. 设 $f \in \mathrm{C_C}(X)$, 且 $f \prec \bigcup_i U_i$. 从而 $\bigcup_i U_i$ 为紧集 $\operatorname{supp} f$ 的开复盖. 于是，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i.$$

由定理 2.3,

$$f=\sum_{i=1}^{N} f_i,\quad f_i\in \mathrm{C_C}(X),\ f_i\prec U_i\ \ 1\le i\le N.$$

因此,

$$I(f)=\sum_{i=1}^{N} I(f_i)\le \sum_{i=1}^{N}\mu^*(U_i)\le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(U_i).$$

将上式两端在集合 $\{f:\ f\in \mathrm{C_C}(X),\ f\prec \bigcup_i U_i\}$ 上取上确界，由 (α) 便得

$$\mu^*\Big(\bigcup_i U_i\Big)\le \sum_i \mu^*(U_i).$$

为证 μ^* 对 X 的任一列子集 $\{A_i\}$ 也具有可列次可加性，不妨设

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)<\infty.$$

于是，对每个 $i\in\mathbb{N}$, 有开集 $U_i\supset A_i$, 使得

$$\mu^*(U_i)\le \mu^*(A_i)+\varepsilon 2^{-i}.$$

于是,

$$\mu^*\Big(\bigcup_i A_i\Big)\le \mu^*\Big(\bigcup_i U_i\Big)\le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(U_i)\le \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)+\varepsilon.$$

因此，上面的断言成立，μ^* 是外测度.

为证任一 Borel 子集为 μ^* 可测的，由第一章定理 6.1, 只须证明 X 的任一开集 U 为 μ^* 可测的，即证

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap U)+\mu^*(A\cap U^c),\quad \forall A\subset X.$$

事实上，我们只须证明

$$\mu^*(A)\ge \mu^*(A\cap U)+\mu^*(A\cap U^c),\quad \forall A\subset X. \tag{$*$}$$

不妨设 $\mu^*(A) < \infty$. 由 (β), 有开集 $V \supset A$, 满足

$$\mu^*(V) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

如果我们能够证明

$$\mu^*(V) \ge \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\varepsilon, \qquad (**)$$

那末联立以上两式便得

$$\mu^*(A) + \varepsilon \ge \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) - 2\varepsilon,$$

再由 ε 的任意性, 便得 $(*)$. 因此, 我们只须证明 $(**)$.

由 (α), 有 $f_1 \in \mathrm{C_C}(X)$, 满足

$$I(f_1) \ge \mu^*(V \cap U) - \varepsilon,$$

以及 $f_1 \prec V \cap U$. 记 $K = \operatorname{supp} f_1$, 则开集 $V \cap K^c \supset V \cap U^c$. 于是, 由 (α), 有 $f_2 \in \mathrm{C_C}(X)$, 满足

$$I(f_2) \ge \mu^*(V \cap K^c) - \varepsilon \ge \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon,$$

以及 $f_2 \prec V \cap K^c$. 显然, $f_1 + f_2 \prec V$, 以及 $I(f_1 + f_2) \le \mu^*(V)$. 后者即为

$$[\mu^*(V \cap U) - \varepsilon] + [\mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon] \le \mu^*(V),$$

此即 $(**)$. □

引理3.5 设 X, I, μ^* 如引理 3.4 中所述, $A \subset X$, 以及 $f \in \mathrm{C_C}(X)$, 那末以下两结论成立:

(1) 若 $\chi_A \le f$, 则 $\mu^*(A) \le I(f)$;

(2) 若 $0 \le f \le \chi_A$, 且 A 为紧集, 则 $I(f) \le \mu^*(A)$.

证 (1) 设 $0 < \varepsilon < 1$, 并记

$$U_\varepsilon = \{x \in X : f(x) > 1 - \varepsilon\}.$$

显然， U_ε 为开集，且 $U_\varepsilon \supset A$, 由 (α),

$$\mu^*(U_\varepsilon) = \sup\{I(g):\ g \prec U_\varepsilon\}.$$

于是，

$$g \le \chi_{U_\varepsilon} \le (1/(1-\varepsilon))f,$$

从而

$$\mu^*(U_\varepsilon) \le (1/(1-\varepsilon))I(f),$$

因此

$$\mu^*(A) \le \mu^*(U_\varepsilon) \le (1/(1-\varepsilon))I(f).$$

由上式及 ε 的任意性，便得 (1) 的结论.

(2) 设 U 为一开集，且 $U \supset A$. 显然， $f \prec U$. 于是

$$I(f) \le \mu^*(U).$$

将上式两端对开集 $U \supset A$ 取下确界，由 (β) 便得 $I(f) \le \mu^*(A)$. □

引理3.6 设 X, I, μ^* 如引理 3.4 中所述. 若 μ 为 μ^* 在 $\mathcal{B}(X)$ 上的限制，则 μ 为 Radon 测度，且

$$I(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in \mathrm{C_C}(X).$$

证 由定理 2.2, 对任一紧集 K, 有一 $f \in \mathrm{C_C}(X)$, 使得 $\chi_K \le f$. 于是，由引理 3.5, $\mu(K) < \infty$. 因此，测度 μ 满足条件 (a).

设 $A \in \mathcal{B}(X)$. 由 (β),

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mu^*(A) &= \inf\{\mu^*(U):\ U\text{为开集},\ U \supset A\} \\ &= \inf\{\mu(U):\ U\text{为开集},\ U \supset A\}.\end{aligned}$$

于是， μ 满足外正则条件 (b).

设 U 为任一开集. 由 (α) 以及引理 3.5(2) 可得

$$\begin{aligned}\mu(U) = \mu^*(U) &= \sup\{I(f):\ f \prec U\}\\ &\le \sup\{\mu^*(\operatorname{supp} f):\ f \prec U\}\\ &= \sup\{\mu(\operatorname{supp} f):\ f \prec U\}\\ &\le \sup\{\mu(K):\ K\text{为紧集},\ K \subset U\}.\end{aligned}$$

由上式结合明显的不等式

$$\mu(U) \ge \sup\{\mu(K):\ K\text{为紧集},\ K \subset U\},$$

便知 μ 满足内正则条件 (c).

因此， μ 为 X 上的 Radon 测度. 余下，我们来建立等式

$$I(f) = \int_X f\,d\mu.$$

显然，只需考虑 $f \ge 0$ 的情形.

对任一 $\varepsilon > 0$ 以及任一 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$f_n(x)\begin{cases}0, & \text{当} f(x) \le (n-1)\varepsilon;\\ f(x)-(n-1)\varepsilon, & \text{当}(n-1)\varepsilon < f(x) < n\varepsilon;\\ \varepsilon, & \text{当} f(x) \ge n\varepsilon.\end{cases}$$

显然， $f_n \in \mathrm{C_c}(X)$, 且 $\operatorname{supp} f_n = \overline{\{x:\ f(x) > (n-1)\varepsilon\}}$ 作为紧集 $\operatorname{supp} f$ 的闭子集也是紧集. 因 f 为有界函数，故必存在某 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时 $f_n = 0$. 于是,

$$f = \sum_{n=1}^{N} f_n.$$

记

$$K_0 = \operatorname{supp} f,\quad K_n = \{x \in X:\ f(x) \ge n\varepsilon\},\ n \in \mathbb{N}.$$

容易验证

$$\varepsilon\chi_{K_n} \le f_n \le \varepsilon\chi_{K_{n-1}} \quad (1 \le n \le N).$$

于是

$$\varepsilon\mu(K_n) \le \int_X f_n\, d\mu \le \varepsilon\mu(K_{n-1}) \qquad (1 \le n \le N).$$

如将不等式

$$\varepsilon\chi_{K_n} \le f_n \le \varepsilon\chi_{K_{n-1}}$$

改写成

$$\chi_{K_n} \le \frac{1}{\varepsilon} f_n \le \chi_{K_{n-1}},$$

并使用引理 3.5, 便得

$$\varepsilon\mu(K_n) \le I(f_n) \le \varepsilon\mu(K_{n-1}) \qquad (1 \le n \le N).$$

于是我们得到

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) \le \int_X f\, d\mu \le \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \mu(K_n)$$

以及

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) \le I(f) \le \varepsilon \sum_{n=0}^{N-1} \mu(K_n).$$

因此,

$$\left| I(f) - \int_X f\, d\mu \right| \le \varepsilon\mu(\operatorname{supp} f).$$

由 ε 的任意性, 得到

$$I(f) = \int_X f\, d\mu. \square$$

定理3.7 (Riesz 表现定理) 设 X 为 LCHS. 若 I 为 $\mathrm{C_C}(X)$ 上的正线性泛函，则在 X 上存在唯一的 Radon 测度 μ, 使得

$$I(f) = \int_X f\,d\mu, \quad \forall f \in \mathrm{C_C}(X).$$

证 存在性由引理 3.6 得到.

现证唯一性. 假设存在两个 Radon 测度 μ 和 ν, 满足

$$I(f) = \int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\nu, \quad \forall f \in \mathrm{C_C}(X),$$

那末由定理 3.3 可得：对任一开集 $U \subset X$, 有 $\mu(U) = \nu(U)$. 再由 μ 和 ν 的外正则条件 (b) 可得：对任一 $A \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\mu(A) = \nu(A)$.

于是我们完成了 Riesz 表现定理的证明. □

§4. Лузин 定理

引理4.1 设 X 为 LCHS, μ 为 X 上的 Radon 测度. 若

$$E \in \mathcal{B}(X), \quad \mu(E) < \infty,$$

则

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K):\ K \subset E,\ K \text{ 为紧集}\}$$

证 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由 μ 的正则性，有开集 $U \supset E$, 使得

$$\mu(U) < \mu(E) + \varepsilon,$$

以及有紧集 $L \subset U$, 使得

$$\mu(L) > \mu(U) - \varepsilon.$$

由 $\mu(U\setminus E)<\varepsilon$, 并使用 μ 的外正则性，必有一开集 $V\supset U\setminus E$, 满足 $\mu(V)<\varepsilon$. 记 $K=L\setminus V$, 则 K 为一紧集，且

$$\begin{aligned}\mu(K)&=\mu(L)-\mu(L\cap V)\\&>\mu(U)-\varepsilon-\mu(V)\\&>\mu(E)-2\varepsilon.\end{aligned}$$

上式蕴含着引理的结论. □

定理4.2 设 X 为 LCHS, μ 为 X 上的 Radon 测度. 若 $1\le p<\infty$ 则 $C_c(X)$ 在 $L^p(\mu)$ 内稠密. (记号 $L^p(\mu)$ 表示空间 $L^p(X,\mathcal{B}(X),\mu)$).

证 设 $f\in L^p(\mu)$, $f\ge 0$. 那么，存在简单函数 $\varphi_n, n\in\mathbb{N}$, 使得

$$0\le\varphi_n\le\varphi_{n+1}\le f,\quad \forall x,\ \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

于是,

$$0\le f-\varphi_n\le f.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\varphi_n\|_p=0.$$

由此可见,简单函数类在 $L^p(\mu)$ 中稠密. 故只需证明特征函数 χ_E 可以由 $C_c(X)$ 中的函数来逼近 (在 L^p 范数意义下), 其中 $E\in\mathcal{B}(X)$, 且 $\mu(E)<\infty$. 由引理 4.1, 有紧集 $K\subset E$, 使得

$$\mu(K)>\mu(E)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 μ 的外正则性，有开集 $U\supset E$, 使得

$$\mu(U)<\mu(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\mu(U\setminus K)<\varepsilon.$$

最后，由定理 2.2, 存在一 $f \in C_c(X)$, 使得 $\chi_K \leq f \leq \chi_U$. 因此

$$\|\chi_E - f\|_p^p = \int_{U \setminus K} |\chi_E - f|^p d\mu \leq \mu(U \setminus K) < \varepsilon$$

此即证实了前面的断言. □

定理4.3(Лузин)　设 X 为 LCHS, μ 为 X 上的 Radon 测度，以及函数 $f:\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel 可测且几乎处处取有限值. 设 $E = \{x \in X:\ f(x) \neq 0\}$. 若 $\mu(E) < \infty$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在一 $g \in C_c(X)$, 使得

$$\mu(\{x \in X:\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

证　分两种情形来考虑.

(i) 设 f 为有界的可测函数. 此时，$f \in L(\mu)$. 于是，由定理 4.2, 存在 $g_n \in C_c(X)$, 使得

$$\|g_n - f\|_1 \longrightarrow 0\ \ (\text{当} n \to \infty).$$

因此，存在 $\{g_n\}$ 的一子序列 (不妨仍记为 $\{g_n\}$), 使得

$$g_n \longrightarrow f\ \ \text{a. e.}$$

由 $\mu(E) < \infty$, 并使用 Егоров 定理 (第一章定理 2.3), 存在集 $A \subset E$, 使得 $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$ 且 $\{g_n\}$ 在 A 上一致收敛于 f.

其次，由 μ 的外正则性，有开集 $U \supset E$, 使得

$$\mu(U \setminus E) < \varepsilon.$$

又由引理 4.1,, 有紧集 $K \subset A$, 使得

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

由于 $\{g_n\}$ 在 $K \subset A$ 上一致收敛于 f, 故 f 在 K 上的限制 $f|_K$ 为连续函数，从而，由 Tietze 延拓定理 (定理 2.4), 存在 $g \in C_c(X)$,

使得当 $x \in K$ 时， $g(x) = f(x)$, 以及 $\operatorname{supp} g \subset U$. 但

$$\{x \in X:\ f(x) \neq g(x)\} \subset (U \setminus K).$$

因此，

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X:\ f(x) \neq g(x)\}) &\le \mu(U \setminus K)\\ &\le \mu(U \setminus E) + \mu(E \setminus A) + \mu(A \setminus K) < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

于是，定理的结论对有界可测函数成立.

(ii) 设 f 为无界的可测函数. 如记 $E_n = \{x \in E:\ |f(x)| \le n\}$, 则 $E_n \nearrow E\ (n \to \infty)$. 因此，存在 N, 使得

$$\mu(E \setminus E_n) < \varepsilon, \quad 当 n > N.$$

考虑某 $n > N$. 对函数 $f\chi_{E_n}$ 使用 (i) 的结论，存在 $g \in \mathrm{C_C}(X)$ 使得

$$\mu(\{x \in X:\ g(x) \neq f(x)\chi_{E_n}(x)\}) < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\mu(\{x:\ g \neq f\}) &\le \mu(\{x:\ g \neq f\chi_{E_n}\}) + \mu(\{x:\ f\chi_{E_n} \neq f\})\\ &\le \mu(\{x:\ g \neq f\chi_{E_n}\}) + \mu(E \setminus E_n)\\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

到此，定理证毕. □

§5. 测度的 Radon 乘积 (正则积)

设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个测度空间. 在第一章 §7 曾讨论过它们的乘积空间. 回忆一下定义 7.3 的内容. 对于 $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$,

我们称 $A\times B$ 为可测矩形，而 $\mu(A)\nu(B)$ 为它的面积. 基于可测矩形的面积，在 $X\times Y$ 上定义了外测度 λ^*. 然后，按照 Carathéodory 条件，确定一个 σ 代数 $\mathcal{M}$, 并把 λ^* 在 $\mathcal{M}$ 上的限制记作 $\mu\times\nu$. 称之为测度 μ 与 ν 的乘积. 我们知道，$\mathcal{M}\supset\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. 其中 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 表示可测矩形之全体生成的 σ 代数. 定义 7.3 说的是，测度空间 $(X\times Y,\mathcal{M},\mu\times\nu)$ 和 $X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mu\times\nu)$ 都叫作 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 和 $(Y.\mathcal{B}.\nu)$ 的乘积空间. 我们知道乘积测度 $\mu\times\nu$ 满足条件

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\ \ \forall\ A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}.$$

现在，假设 X 和 Y 是 LCHS, 且 μ 和 ν 分别是 X 和 Y 上的 Radon 测度. 我们自然会问上述的乘积测度 $\mu\times\nu$ 是否 $X\times Y$ 上的 Radon 测度.

为了讨论这个问题，我们先回忆一下乘积拓扑的概念 (见 [11], 114 页). 设 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 分别是 X 和 Y 的拓扑基. 那么，定义 $\mathcal{W}=\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ 为 $X\times Y$ 的拓扑基. 这样定义的拓扑叫作乘积拓扑. 我们讨论乘积空间时，只讨论这样定义的乘积拓扑. 如果 X,Y 都是 LCHS, 则乘积空间 $X\times Y$ 也是 LCHS(见 [11],192 页). 若 X,Y 皆有可数基，则 $X\times Y$ 亦然.

很明显，乘积测度空间 $(X\times Y,\mathcal{M},\mu\times\nu)$ 中的 σ 代数 $\mathcal{M}$ 一定包含 σ 代数 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, 并且乘积测度 μ 一定满足

$$(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B),\ \forall\ A\in\mathcal{B}(X),\ \ B\in\mathcal{B}(Y) \tag{1}$$

现在，我们的问题是：

问题 1 乘积测度空间 $(X\times Y,\mathcal{M},\mu\times\nu)$ 中的 σ 代数 $\mathcal{M}$ 与 Borel 代数 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 的关系如何？如果 $\mathcal{M}\supset\mathcal{B}(X\times Y)$, 那么 $\mu\times\nu$ (限制在 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 上) 是否 Radon 测度？

问题 2 如果不能确定 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{B}(X\times Y)$ 的关系，那末有没有办法在 $X\times Y$ 上定义一个 Radon 测度 γ, 使它满足条件 (1)? 如果这样的 γ 存在，它是否唯一？

当 X, Y 都有可数基时，问题 1 有肯定的回答. 而对于问题 2, 我们将使用 Riesz 表现定理来给予解答.

引理5.1 (a) 若 X 和 Y 是 LCHS, 则

$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y);$$

(b) 若 X 和 Y 是具有可数基的 LCHS, 则

$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

证 由乘积的定义，有

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B), \quad A \in \mathcal{B}(X), \ B \in \mathcal{B}(Y).$$

考虑一个连续映射 $\pi: \ X \times Y \longrightarrow X$, $\pi((x, y)) = x$. 由定理 3.1 可知 π 为 Borel 可测的，也即当 $A \in \mathcal{B}(X)$ 时，有

$$\pi^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y).$$

同理可证当 $B \in \mathcal{B}(Y)$ 时，有 $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$. 于是 $A \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$. 由此可知 (a) 成立.

为证 (b), 设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别是 X 和 Y 的可数基. 那么 $\mathcal{W} = \{U \times V: \ U \in \mathcal{U}, \ V \in \mathcal{V}\}$ 是 $X \times Y$ 的可数基. 于是， $X \times Y$ 中的任一开集可表示成 $\mathcal{W}$ 中可数个集合的并集，而 $\mathcal{W}$ 中每一集属于 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. 故 $X \times Y$ 中任一开集属于 $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$, 由此推得 $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$, (b) 证毕. □

下面的定理部分地回答了问题 1.

定理5.2 设 X 和 Y 是具有可数基的 LCHS, μ 和 ν 分别是 X 和 Y 上的 Radon 测度. 那么乘积测度 $\mu \times \nu$ 是 $X \times Y$ 上的 Radon 测度.

证 由引理 5.1(b) 知

$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

因此，我们只需证明 $\mu\times\nu$ 是 Radon 测度．但由定理 3.2, 我们只需证明 $\mu\times\nu$ 在 $X\times Y$ 的每个紧集都取有限的值．

设 K 为 $X\times Y$ 的紧集．考虑连续映射

$$\pi_1:\ X\times Y\to X,\ \pi_1(x,y)=x;$$
$$\pi_2:\ X\times Y\to Y,\ \pi_2(x,y)=y.$$

并记 $K_1=\pi_1(K)$ 及 $K_2=\pi_2(K)$. 显然， $K\subset K_1\times K_2$, 且 K_1 和 K_2 分别是 X 和 Y 的紧集，因此

$$(\mu\times\nu)(K)\le(\mu\times\nu)(K_1\times K_2)=\mu(K_1)\nu(K_2)<\infty.\square$$

为给出问题 2 的回答，我们分成两步来完成：

(i) 在空间 X×Y 上定义一个适当的 Randon 测度 γ, 使它满足等式 (1);

(ii) 证明 γ 的唯一性．

为了确定 X×Y 上的 Radon 测度 γ, 我们将以 Riesz 表现定理为工具．

引理5.3 设 X 和 Y 是 LCHS, μ 和 ν 分别是 X 和 Y 上的 Radon 测度．若 $f\in C_c(X\times Y)$, 则有

(a) 对每一 $x\in X$, $f(x,\cdot)\in C_c(Y)$;

(b) 定义 $\varphi(x)=\int_Y f(x,y)\,d\nu$, 有 $\varphi\in C_c(X)$.

证 记 $K=\operatorname{supp}f(x,y)$. K 为 $X\times Y$ 的紧集．又记

$$K_1=\{x\in X:\ (x,y)\in K\},\quad K_2=\{y\in Y:\ (x,y)\in K\}.$$

易见 K_1 为 X 的紧集， K_2 为 Y 的紧集．对每一 $x\in X$, $f(x,\cdot)$ 为 Y 上的连续函数，且 $\operatorname{supp}f(x,\cdot)\subset K_2$, 故 $f(x,\cdot)\in C_c(Y)$. 因此，(a) 成立．

任取 $x_0\in X$. 对每一 $y\in K_2$, 由 f 在 (x_0,y) 处的连续性，存在 x_0 的一个开邻域 U_y 和 y 的一个开邻域 V_y, 使得

$$|f(x,y')-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ 当\ x\in U_y,\ y'\in V_y.$$

于是

$$|f(x,y') - f(x_0,y')| < \varepsilon, \text{ 当 } x \in U_y, \ y' \in V_y.$$

显然，$\{V_y : y \in K_2\}$ 为 K_2 的开复盖，故必存在有限个 V_{y_i}, $i = 1, \cdots, m$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{m} V_{y_i} \supset K_2.$$

取 $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{y_i}$, 则得

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon, \text{ 当} x \in U, \ y \in K_2. \qquad (*)$$

故当 $x \in U$ 时，有

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_{K_2} |f(x,y) - f(x_0,y)| d\nu \leq \varepsilon\nu(K_2).$$

注意到 $\operatorname{supp}\varphi \subset K_1$, 便知 $\varphi \in \mathrm{C_C}(X)$. 于是 (b) 成立. □

根据引理 5.3, 我们在 $C_c(X \times Y)$ 上定义泛函 I:

$$\forall f \in \mathrm{C_C}(X \times Y), \ I(f) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \Big) d\mu(x). \qquad (2)$$

显然，I 是正线性泛函. 那么，根据 Riesz 表现定理，在 $X \times Y$ 上存在唯一的 Radon 测度 γ 满足

$$\forall f \in \mathrm{C_C}(X \times Y), \quad I(f) = \int_{X \times Y} f d\gamma. \qquad (3)$$

引理5.4 设 X, Y 都是 LCHS, μ, ν 分别是 X 和 Y 上的 Radon 测度. 若 Radon 测度 γ 由 (2) 和 (3) 定义，则 γ 满足等式 (1), 即

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), \forall B \in \mathcal{B}(Y), \ \gamma(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \qquad (4)$$

证 先考虑 A 和 B 分别是 X 和 Y 的开集的情形. 此时, 取紧集 $K_n \subset A$ 和紧集 $J_n \subset B$ $(n \in \mathbb{N})$, 使

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \mu(A), \quad \lim_{n\to\infty} \nu(J_n) = \nu(B).$$

取 $\varphi_n \prec A$, 使 $\chi_{K_n} \leq \varphi_n$; 取 $\psi_n \prec B$, 使 $\chi_{J_n} \leq \psi_n$. 那么,

$$\varphi_n\psi_n \prec A \times B,$$

且根据 I 及 γ 的定义,

$$\gamma(A \times B) \geq I(\varphi_n\psi_n) = \int_X \varphi_n\Big(\int_Y \psi_n d\nu\Big) d\mu \geq \mu(K_n)\nu(J_n);$$
$$\mu(A)\nu(B) \geq \gamma(A \times B) \geq \mu(K_n)\nu(J_n).$$

令 $n \to \infty$ 便得 (4).

现设 A, B 分别是 X, Y 的紧集. 那么,

$$\gamma(A \times B) = \inf\{\gamma(G): \quad G\text{是开集且}G \supset A \times B\}.$$

对于任意的开集 $G \supset A \times B$, 定义

$$\forall x \in X,\ G_x = \{y \in Y: \quad (x, y) \in G\}.$$

那么, G_x 是 Y 的开子集. 而且当 $x \in A$ 时 $G_x \supset B$. 先取定 $x \in A$. 对于每个 $y \in B$, 有 X 的开集 U_y 和 Y 的开集 V_y, 使得

$$(x, y) \in U_y \times V_y \subset G.$$

开集族 $\{V_y: \ y \in B\}$ 是 B 的复盖. 从中取有限的子复盖 $\{V_{y_i}: i = 1, \cdots, m\}$. 定义

$$P_x = \bigcap_{i=1}^m U_{y_i}, \quad Q_x = \bigcup_{i=1}^m V_{y_i}.$$

显然，它们分别是 X 和 Y 的开集，且

$$\{x\} \times B \subset P_x \times Q_x \subset G.$$

于是， $\{P_x: x \in A\}$ 是 A 的开复盖．从中取有限的子复盖 $\{P_{x_i}: i = 1, \cdots, n\}$．定义

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_{x_i}, \quad Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_{x_i}.$$

那么， P, Q 分别是 X, Y 的开集，且

$$A \times B \subset P \times Q \subset G.$$

因此，我们断定

$$\begin{aligned}\gamma(A \times B) = \inf\{\gamma(P \times Q) :\\ P, Q \text{ 分别是} X, Y \text{的开集且 } P \times Q \supset A \times B\}.\end{aligned}$$

那么，由于已证得 $\gamma(P \times Q) = \mu(P)\nu(Q)$, 我们证明了， (4) 式当 A, B 分别为 X, Y 的紧集时成立．

在一般情形下，设 $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$. 若 $\mu(A)\nu(B) = 0$ 或 ∞, 则由已证的结果，容易地推出 (4). 现设 $\mu(A)\nu(B) \in (0, \infty)$. 那么，对于任给的 $\varepsilon > 0$, 在 X 中有紧集 K 和开集 U, 在 Y 中有紧集 J 和开集 V, 使得

$$\begin{aligned}&K \subset A \subset U \quad J \subset B \subset V,\\ &\mu(U - K) + \nu(V - J) < \varepsilon.\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}&K \times J \subset A \times B \subset U \times V,\\ &\gamma(U \times V - K \times J) < \varepsilon(\mu(A) + \nu(B) + \varepsilon).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\gamma(K \times J) \leq \gamma(A \times B) \leq \gamma(U \times V),$$
$$\gamma(K \times J) \leq \mu(A)\nu(B) \leq \gamma(U \times V).$$

由 ε 的任意性，我们证得 (4).□

定义 5.1 我们把 $X \times Y$ 上的满足 (4) 的 Radon 测度 γ 叫做 μ 和 ν 的 Radon 乘积，或正则积.

现在，回答问题 2 的步骤 (i) 已经完成. 下面我们来进行步骤 (ii).

为说话方便，规定一些名称. 设 X, Y 都是 LCHS. 若 A, B 分别为 X, Y 的 Borel 集，则称 $A \times B$ 为 Borel 矩形. 若 U, V 分别为 X, Y 的开集，则称 $U \times V$ 为开矩形. 把一切可以表示成有限个两两不交的 Borel 矩形的并的集合收集起来，记作 $\mathcal{E}$.

引理5.5 设 X, Y 都是 LCHS. 若 γ 是 $X \times Y$ 上的 Radon 测度，则对于每个开集 $G \subset X \times Y$

$$\gamma(G) = \sup\{\gamma(E): \quad E \in \mathcal{E},\ E \subset G\}.$$

证 设 $0 \leq \alpha < \gamma(G)$. 由内正则性知，存在紧集 $K \subset G$ 使得

$$\gamma(K) > \alpha.$$

对于每个 $x \in K$, 取一个开矩形 R_x 使 $x \in R_x \subset G$. 那么，$\{R_x : x \in K\}$ 是 K 的开复盖. 从中取有限子复盖，记为 $\{R_i : i = 1, \cdots, m\}$. 定义

$$E_1 = R_1, \quad E_{i+1} = R_{i+1} - \bigcup\{R_j : j = 1, \cdots, i\} \quad j = 1, \cdots, m-1.$$

易见， $E_i \in \mathcal{E}$, $\rangle = \infty, \cdots, \Updownarrow$, 它们两两不交，并且

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma(E_i) \geq \gamma(K) > \alpha.$$

由此推出所需的结论. □

引理5.6 设 X, Y 都是 LCHS, μ, ν 分别是 X 和 Y 上的 Radon 测度. 那么, $X\times Y$ 上只可能有一个满足 (1) 的 Radon 测度.

证 设 γ, τ 都是满足 (1) 的 Radon 测度. 那么在每个 Borel 矩形上, γ, τ 取相同的值. 于是, 根据引理 5.5, 它们在每个开集上取相同的值. 结果, 根据外正则性, 它们相同. □

至此, 我们已经完全回答了问题 2. 把结果写成下述定理.

定理5.7 设 X, Y 都是 LCHS, μ, ν 分别是 X 和 Y 上的 Radon 测度. 那么, μ 与 ν 的 Radon 乘积 (正则积) 存在且唯一.

习　题

(§1~ §5)

1. 设 $f_n\in \mathrm{C}(X)$, $n\in\mathbb{N}$, 且 f_n 一致收敛到 f. 那么 $f\in\mathrm{C}(X)$.
2. 设 $f,g\in\mathrm{C}(X)$. 那么 $f+g\in\mathrm{C}(X)$, $fg\in\mathrm{C}(X)$, $\min(f,g)\in \mathrm{C}(X)$.
3. 若 $f\in\mathrm{C_C}(X)$, 则 f 有最大值和最小值, 从而有界.
4. 设 X 为 Hausdorff 空间, Y 为 X 的子空间. 证明

$$\mathcal{B}(Y)=\{A:\ A=B\cap Y,\ B\in\mathcal{B}(X)\}.$$

5. 设 X 为 LCHS. 称 $f\in\mathrm{C}(X)$ 满足条件 $(*)$, 是指

$$\forall\,\varepsilon>0\qquad \{x:\ |f(x)|\ge\varepsilon\}\ \text{为紧集}. \tag{$*$}$$

如记

$$\mathrm{C_0}(X)=\{f\in\mathrm{C}(X):\ f\ \text{满足}(*)\},$$

试证 $\mathrm{C_0}(X)=\overline{\mathrm{C_C}(X)}$. 这里, $\mathrm{C_0}(X)$ 为线性赋范空间, 赋有范数

$$\|f\|_c=\max\{|f(x)|:\quad x\in X\}.$$

6. 设 X 为 LCHS. 证明：如果 μ 为 σ 有限的 Radon 测度，$E \in \mathcal{B}(X)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 X 的开集 U 和 X 的闭集 F, 使得

$$F \subset E \subset U, \text{ 以及} \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

7. 设 X 为 LCHS, K 为 X 的紧集. 证明：若 $I(f)$ 为 $\mathrm{C_C}(X)$ 上的正线性泛函，则存在常数 $c(K)$. 使得

$$|I(f)| \le c(K)\|f\|_c, \ \forall\ f \in \{f \in \mathrm{C_C}(X) : \operatorname{supp} f \subset K\}.$$

8. 证明引理 4.1 的结论对 σ 有限的 Borel 集 E 也成立.
9. 证明在 Лузин 定理中，如果 f 还是有界的，则所取的 g 可满足.

$$\|g\|_c \le \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

§6. Haar 测度

(一) 拓扑群

定义6.1 设 G 是一个群 (关于乘法), 并且是拓扑空间. 如果 $G \times G$ 到 G 的映射 $(x, y) \to xy$ 及 G 到 G 的映射 $x \to x^{-1}$ 都是连续的，则称 G 为拓扑群.

我们对这个定义做如下解释.

(1) 映射 $(x, y) \mapsto xy$ 连续，指的是，任取点 $x, y \in G$, 对于 xy 的任一邻域 W, 存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 使当 $u \in U$ 和 $v \in V$ 时 $uv \in W$. 当然，说到一个点的邻域，指的是含有这个点的一个开集. 我们这样来解释映射的连续性，与说开集的原象是开集是等价的.

(2) 映射 $x \mapsto x^{-1}$ 连续，指的是，任取 $x \in G$, 对于 x^{-1} 的任意邻域 V, 存在 x 的一个邻域 U, 使当 $u \in U$ 时，$u^{-1} \in V$.

(3)

$$\begin{cases} \text{映射}(x,y) \to xy \text{ 连续}, \\ \text{映射} x \to x^{-1} \text{ 连续} \end{cases}$$

等价于说映射 $(x,y) \to xy^{-1}$ 连续.

我们对于命题 (3) 给予证明.

设映射 $(x,y) \to xy^{-1}$ 是连续的. 那么, 对于 xy^{-1} 的邻域 W, 存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 使当 $u \in U$ 和 $v \in V$ 时, $uv^{-1} \in W$. 取 x 为 G 的单位元 e, 那么我们看到, 当 $v \in V$ 时, $v^{-1} \in W$. 这证明了映射 $y \to y^{-1}$ 是连续的. 那么, 对于点 y 的邻域 V, 存在 y^{-1} 的邻域 V', 使当 $v \in V'$ 时, $v^{-1} \in V$. 可见当 $u \in U$, $v \in V'$ 时, $uv \in W$. 这就证明了映射 $(x,y^{-1}) \to xy^{-1}$ 是连续的.

反过来, 设

$$\begin{cases} \text{映射}(x,y) \to xy \text{ 连续}, \\ \text{映射} x \to x^{-1} \text{ 连续}. \end{cases}$$

对于 xy^{-1} 的邻域 W, 存在开集 U_x 和 $V_{y^{-1}}$, 使 $x \in U_x$, $y^{-1} \in V_{y^{-1}}$ 且当 $u \in U_x$, $v^{-1} \in V_{y^{-1}}$ 时, $uv^{-1} \in W$. 而对于 $V_{y^{-1}}$, 存在开集 V_y, 使 $y \in V_y$ 且当 $v \in V_y$ 时 $v^{-1} \in V_{y^{-1}}$. 合起来, 我们看到, 当 $u \in U_x$, $v \in V_y$ 时, $uv^{-1} \in W$. 这证明映射 $(x,y) \to xy^{-1}$ 是连续的.

对定义 6.1 的另一项说明是, 在拓扑群上,

(4) 固定一元 $u \in G$, 映射 $x \to ux$ 及 $x \to xu$ 都是同胚映射; 且映射 $x \to x^{-1}$ 也是同胚映射.

定理6.1 设 G 是拓扑群. 那么以下四条彼此等价:

(i) G 是 T_0 空间;

(ii) G 是 T_1 空间;

(iii) G 是 T_2 空间;

(iv) 对于单位元 e, $\cap\{U: U\text{为开集}, e \in U\} = \{e\}$.

证 我们回想一下, 说 G 是 T_0 空间, 指的是对于 G 的相异二点 x 和 y, 一定存在开集 U 含 x 和 y 中之一而不含另一点. 说 G

是 T_1 空间，指的是对于 G 的相异二点 x 和 y, 存在两开集 U 和 V, 使 $x \in U, y \in V$ 而 $x \notin V, y \notin U$; 这等价于说， G 的单点集都是闭集. 说 G 是 T_2 空间，或 Hausdorff 空间，指的是对于 G 的任意相异二点 x 和 y, 存在开集 U 和 V, 使 $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$.

先证 (i)$\Longrightarrow$(ii). 设 x, y 是 G 的不同的两点. 由 (i) 知，有一开集 U 含 x, y 之一而不含另一点. 设 $x \in U$ 而 $y \notin U$. 令 $V = yU^{-1}x$, 则 V 是开集，且 $y \in V$. 我们说 $x \notin V$. 否则的话，设有某 $u \in U$ 使 $x = yu^{-1}x$, 那么 $y = u \in U$. 这是不可能的.

设 (ii) 成立. 设 $x \neq y$ 是 G 的两个元. 令 $H = G - \{y^{-1}x\}$. 则 H 是开集且单位元 $e \in H$. 由映射 $(u, v) \to uv$ 的连续性及 $ee = e$, 知对于 e 的邻域 H, 存在 e 的邻域 U 和 V 使当 $u \in U$ 和 $v \in V$ 时 $uv \in H$. 令

$$W = U \cap U^{-1} \cap V \cap V^{-1}.$$

那么 W 是开集且 $e \in W = W^{-1}$, $WW^{-1} \subset H$. 假设有 $s \in W$ 和 $t \in W$ 使 $xs = yt$, 那么 $x = yts^{-1} \in yWW^{-1} \subset yH = G - \{x\}$. 这是不可能的. 可见 $xW \cap yW = \emptyset$. 这证明了 (iii).

设 (iii) 成立. 那么，对于任何 $x \neq e$, 存在开集 U 和 V 使 $x \in U, e \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$, 可见 (iv) 成立.

设 (iv) 成立. 如果 $x \neq y$, 则 $x^{-1}y \neq e$. 从而存在开集 U 使 $e \in U$ 而 $x^{-1}y \notin U$. 即 $y \notin xU$ 而 $x \in xU$. 证得 (i).□

例 1 Euclid 空间 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{R} - \{0\}$, 以通常的乘法，构成拓扑群. 是局部紧的. 又， $\mathbb{R}$ 以加法构成拓扑群，是局部紧的，且 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度 m 是平移不变的，即对于可测集 $E \subset \mathbb{R}$, 数 $a \in \mathbb{R}$, $m(E) = m(E + a)$.

例 2 设 S 是绝对值 (即模) 为 1 的复数的全体：

$$S = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

集合 S 以复数乘法及 $\mathbb{R}^2$ 的相关拓扑 (relateve topology)(见 [illegible]) 成为紧致拓扑群.

例 3 设 M 是形如 $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵的全体，其中 $x > 0, y \in \mathbb{R}$. 以通常的矩阵乘法，M 是群. 规定 M 的拓扑由 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑自然导出. 那么 M 是局部紧拓扑群.

例 4 有理数集 $\mathbb{Q}$ 按加法运算及 $\mathbb{R}$ 的拓扑构成拓扑群，它是 T_2 空间，不是局部紧的.

做为约定，以后讲到拓扑群时，都假定它是 T_2 空间. 根据定理 5.1, 这个限制并不强.

(二) 拓扑群上的连续函数

设 G 是拓扑群，f 是 G 上的实值 (或复值) 函数. 如果对于每个 $\varepsilon > 0$, 都存在 e 的一个邻域 U, 使得当 $x^{-1}y \in U$ 时,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

那么就说 f 是左一致连续的；类似地，将上述条件 $x^{-1}y \in U$ 换为 $yx^{-1} \in U$, 就得到右一致连续的定义. 我们注意到，对于 e 的任一邻域 U 都能找到含在 U 中的一个对称邻域 $V = V^{-1}$, $(e \in V)$. 那么

$$x^{-1}y \in V \iff y^{-1}x \in V,$$
$$yx^{-1} \in V \iff xy^{-1} \in V.$$

可见，定义中的 x, y 地位是对称的.

定理6.2 设 G 是拓扑群，$f \in \mathrm{C_C}(G)$. 那么 f 既是左一致连续的，也是右一致连续的. (此时简单地说 f 是一致连续的.)

证 记 $K = \operatorname{supp} f$. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in K$, $\exists$ 开集 U_x 使得 $x \in U_x$, 且当 $y \in U_x$ 时 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 记 $W_x = x^{-1}U_x$. 它是含 e 的开集. 于是存在含 e 的开集 V_x, 使得 $V_x = V_x^{-1}$ 且 $V_x \cdot V_x \subset W_x$. 开集族 $\{xV_x : x \in K\}$ 复盖 K, 可从中取得有限个 $x_iV_{x_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

它们复盖 K. 令

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}.$$

那么 $V = V^{-1}$, $e \in V$. 如果 $x^{-1}y \in V$ 且 $x \in K$, 则存在 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使 $x \in x_n V_{x_k}$. 那么, 一方面 $x \in x_k W_{x_k} = U_{x_k}$, 从而

$$|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

另一方面, $y \in xV \subset x_k V_{x_k} \cdot V \subset x_k W_{x_k} = U_{x_k}$. 从而

$$|f(y) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

可见

$$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon.$$

如果 $x^{-1}y \in V$ 且 $y \in K$, 则因 $y^{-1}x \in V^{-1} = V$, 由已证之事知亦有 $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. 如果 $x^{-1}y \in V$ 但 $x \notin K, y \notin K$, 则显然 $f(x) = f(y) = 0$.

总之, 证得 f 左一致连续. 用同样的论述可证得 f 的右一致连续性. 证毕. □

(三) Haar 测度的存在性与唯一性

定义6.2 设 G 是局部紧群, μ 是 G 上的非零 Radon 测度. 若对于每个集 $E \in \mathcal{B}(G)$ 和每点 $x \in G$, $\mu(xE) = \mu(E)$, 则称 μ 是左 Haar 测度; 若对于每个集 $E \in \mathcal{B}(G)$ 和每个点 $x \in G$, $\mu(E \cdot x) = \mu(E)$, 则称 μ 是右 Haar 测度. 若 μ 既是左 Haar 测度又是右 Haar 测度, 则它叫作 Haar 测度.

我们说明, 记号 xE 表示集 $\{u \in G: x^{-1}u \in E\}$, Ex 表示集 $\{u \in G: ux^{-1} \in E\}$.

定理6.3 设 G 是局部紧群. 那么 G 上存在左 Haar 测度.

证 若 K 是 G 的紧子集, $V\subset G$ 且 $\mathring{V}\neq\emptyset$, 则显然

$$K\subset\bigcup_{x\in G}x\mathring{V}.$$

那么，据有限复盖性质，在 G 中存在有限个元 $x_1,\cdots,x_n$ 使

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}x_i\mathring{V}\subset\bigcup_{i=1}^{n}x_iV.$$

定义

$$(K:V)=\min\left\{n:\ 存在x_1,\cdots,x_n\in G\ 使K\subset\bigcup_{i=1}^{n}x_iV\right\}.$$

显然, $(K:V)=0\iff K=\emptyset$.

把 G 的紧子集的全体记作 $\mathcal{K}$,e 的开邻域的全体记作 $\mathcal{U}$, 取定一个 $K_0\in\mathcal{K}$, 使 $\mathring{K}_0\neq\emptyset$. 对于每个 $U\in\mathcal{U}$, 定义一个 $\mathcal{K}$ 上的实函数 h_U :

$$h_U(K)=(K:U)(K_0:U)^{-1}.$$

显然,

$$\begin{cases}h_U(K_0)=1;\\ 当\ K_1\subset K_2时,\ h_U(K_1)\leq h_U(K_2);\\ h_U(K_1\cup K_2)\leq h_U(K_1)+h_U(K_2);\\ \forall x\in G,\ h_U(xK)=h_U(K).\end{cases}$$

如果

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{m}x_iK_o,$$

$$K_0\subset\bigcup_{j=1}^{n}y_jU\quad(U\in\mathcal{U}),$$

那么

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (x_i y_j) U.$$

可见

$$(K : U) \leq (K : K_0)(K_0 : U).$$

因此

$$0 \leq h_U(K) \leq (K : K_0). \tag{1}$$

我们来证明，当 $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$ 时

$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2). \tag{2}$$

设 $n = (K_1 \cup K_2 : U)$ 且

$$K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U.$$

倘有

$$y_1 \in (x_i U) \cap K_1, \quad y_2 \in (x_i U) \cap K_2$$

则

$$x_i \in (y_1 U^{-1}) \cap (y_2 U^{-1}) \subset (K_1 U^{-1}) \cap (K_2 U^{-1}).$$

这是不可能的. 于是，令

$$N_1 = \left\{ i \in \{1, 2, \cdots, n\} : \ (x_i U) \cap K_1 \neq \emptyset \right\},$$
$$N_2 = \left\{ i \in \{1, 2, \cdots, n\} : \ (x_i U) \cap K_2 \neq \emptyset \right\}.$$

便知 $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. 那么

$$K_1 \subset \bigcup_{i \in N_1} x_i U, \quad K_2 \subset \bigcup_{i \in N_2} x_i U.$$

从而

$$h_U(K_1) + h_U(K_2) \leq h_U(K_1 \cup K_2).$$

这就证得 (2).

对于每个 $K \in \mathcal{K}$, 令 $I_K == [0,(K:K_0)]$ 为 $\mathbb{R}$ 中的闭区间. 定义 X 为乘积空间 $\prod\limits_{K\in\mathcal{K}} I_K$, 赋有乘积拓扑. 由于每个 I_K 是紧致的, 所以, 根据 Тихонов 定理, X 是紧致的.

根据 (1), 把函数 h_U 看作是 X 的一个点, $h_U(K)$ 是点 h_U 在 I_K 上的坐标. 任取 $V \in \mathcal{U}$, $\{h_U : U \in \mathcal{U}, \mathcal{U} \subset \mathcal{V}\}$ 是 X 的子集, 它在 X 中的闭包记作 $S(V)$. 显然, 若 $V_i \in \mathcal{U}$ 且 $V = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i$, 则

$$h_V \in \bigcap_{i=1}^{n} S(V_i),$$

从而

$$S(V) \subset \bigcap_{i=1}^{n} S(V_i).$$

可见, 诸闭集 $S(U)$ $(U \in \mathcal{U})$ 具有"有限交性质". 因此 $\bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}} S(U)$ 不空. 我们取定其中一元 h, 用 $h(K)$ 代表 h 在 I_K 上的投影 (坐标). 那么

$$h(K) \geq 0,\ K \in \mathcal{K};\ h(\emptyset) = 0;$$

$$h(K_0) = 1;$$

$$h(xK) = h(K),\ \forall x \in G,\ \forall K \in \mathcal{K};$$

$$h(K_1) \leq h(K_2),\ \text{若} K_1 \subset K_2,\ K_1, K_2 \in \mathcal{K};$$

$$h(K_1 \cup K_2) \leq h(K_1) + h(K_2).$$

现在我们来证明, 当 $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ $(K_1, K_2 \in \mathcal{K})$ 时

$$h(K_1 \cup K_2) = h(K_1) + h(K_2). \tag{3}$$

事实上, 由于 K_1 和 K_2 是紧集, 所以可以找到开集 $U_i, U_i \supset K_i$, $i = 1, 2$, 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. 于是存在 $V \in \mathcal{U}$ 使 $K_1V \subset U_1$, $K_2V \subset U_2$.

那么，对于每个 $U \in \mathcal{U}$, 只要 $U \subset V^{-1}$, 就有

$$(K_1U^{-1}) \cap (K_2U^{-1}) = \emptyset.$$

此时，根据 (2),

$$h_{U}(K_1) + h_{U}(K_2) = h_{U}(K_1 \cup K_2).$$

我们把 X 的点记为 q, q 在 I_K 上的坐标记为 $q(K)$, $K \in \mathcal{K}$, 我们知道，乘积拓扑是使投影 (projection) 连续的最小拓扑. 所以，从 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $q \mapsto q(K)$,(对于取定的 $K \in \mathcal{K}$) 是 X 上的连续实函数. 对于任取的 $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, 定义 X 上的一个实函数

$$F: \quad q \mapsto q(K_1) + q(K_2) - q(K_1 \cup K_2).$$

那么 F 是连续的. 然而，我们已经知道，当 $U \in \mathcal{U}$, $U \subset V^{-1}$ 时，$F(h_{U}) = 0$. 所以

$$\forall q \in S(V^{-1}), \quad F(q) = 0.$$

这就证明了 (3).

在 G 的拓扑上定义广义实值函数 μ^* :

$$\mu^*(U) = \sup\{h(K): \ K \in \mathcal{K}, \ K \subset U\}.$$

然后，对于每个 $A \subset G$, 定义

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U): \ A \subset U, \ U \text{ 为开集}\}.$$

我们来验证 μ^* 是 G 上的外测度.

显然， $\mu^*(\emptyset) = 0$; μ^* 是单调增的.

先对开集族验证可列次加性，再过渡到一般情形. 设 U_i 是 G 的开集，

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

若 K 是 U 的紧子集，则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. 那么，根据定理 2.1–2.3, 我们断定，存在 $f_i \in \mathrm{C_c}(G)$, 满足

$$0 \le f_i \le 1;\ \operatorname{supp} f_i \subset U_i;\ \forall x \in K\ \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1.$$

令 $K_i = K \cap \operatorname{supp} f_i$. 那么

$$K_i \in \mathcal{K},\ K_i \subset U_i; \quad K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i.$$

于是，

$$h(K) \le \sum_{i=1}^{n} h(K_i) \le \sum_{i=1}^{n} \mu^*(U_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i).$$

从而

$$\mu^*(U) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i).$$

设 $A_i \subset G$, $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在开集 U_i, 使 $A_i \subset U_i$ 且

$$\mu^*(U_i) \le \mu^*(A_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

那么

$$\mu^*(A) \le \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon.$$

我们证明了 μ^* 的可列次加性. 从而 μ^* 是外测度.

现在来验证任一开集 U 都是 μ^*– 可测的 (即关于 μ^* 满足 Carathéodory 条件). 设 V 是开集且 $\mu^*(V) < \infty$. 那么，对于任给的 $\varepsilon > 0$, 可选一个紧集 K, 使 $K \subset V \cap U$, 满足

$$h(K) > \mu^*(V \cap U) - \varepsilon.$$

然后，再选一个紧集 $L \subset V \cap K^c$, 使

$$h(L) > \mu^*(V \cap K^c) - \varepsilon.$$

由于 $K \cap L = \emptyset$, 所以

$$\begin{aligned} h(K \cup L) = h(K) + h(L) &> \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap K^c) - 2\varepsilon \\ &\geq \mu^*(V \cap U)) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

从而推出

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c).$$

对于任意的集 $A \subset G$, 若 $\mu^*(A) < \infty$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $V \supset A$, 使

$$\mu^*(A) > \mu^*(V) - \varepsilon.$$

那么，根据已证的事实，

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &> \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) - \varepsilon. \end{aligned}$$

从而

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c).$$

这样，我们证明了开集 U 是 μ^*- 测的，从而 $\mathcal{B}(G)$ (G 上的 Borel 代数) 的每个元都是 μ^*- 可测的. 把 μ^* 在 $\mathcal{B}(G)$ 上的限制记作 μ, 它是测度.

如果 K 是紧集，那么根据定理 2.1, 存在开集 U, 使 $K = U$ 且 $\overline{U}$ 是紧集. 于是

$$\mu(K) \leq \mu(U) = \sup\{h(A):\ A \in \mathcal{K}, A \subset U\} \leq h(\overline{U}).$$

显然 $h(\overline{U}) < \infty$, 所以 $\mu(K) < \infty$, 即 μ 在紧集上取有限值.

μ 显然是使每个可测集都具有外正则性的.

如果 K 是紧集，U 是包含 K 的开集，那么 $h(K) \le \mu(U)$. 由此推出,

$$h(K) \le \inf\{\mu(U):\ U \text{ 为开集且} U \supset K\} = \mu(K).$$

这样一来，对于任意的开集 U, 有

$$\begin{aligned}\mu(U) &= \sup\{h(K):\ K \in \mathcal{K},\ \mathcal{K} \subset \mathcal{U}\} \\ &= \sup\{\mu(K):\ K \in \mathcal{K},\ \mathcal{K} \subset \mathcal{U}\}.\end{aligned}$$

这就证明，每个开集都是内正则的.

显然，$\mu(K_0) \ge h(K_0) = 1$. 可见 μ 是不恒为零的. μ 的左不变性是明显的.

我们证明了 μ 是 G 上的左 Haar 测度. □

定理6.4 设 G 是局部紧群，μ 是 G 上的左 Haar 测度，那么

(1) 若 U 是 G 的非空开集，则 $\mu(U) > 0$；

(2) 若 $f \in \mathrm{C_c}(G)$, $f \ge 0$, $f \ne 0$(即 f 不恒取零值), 则

$$\int_G f\, d\mu > 0.$$

证 取一个紧集 K, 使 $\mu(K) > 0$, 对于非空开集 $U \subset G$, 开集族 $\{xU:\ x \in G\}$ 是 K 的开复盖，故有 $x_1, \cdots, x_n \in G$ 使

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i U\right) \supset K.$$

于是

$$0 < \mu(K) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U) = n\mu(U).$$

证得 (1).

设 $f \in \mathrm{C_c}(G)$, 满足 (2) 的条件. 那么存在非空开集 U 及正数 ε, 使得 $f \geq \varepsilon\chi_U$. 于是

$$\int_G f\,d\mu \geq \varepsilon\mu(U) > 0.$$

证得 (2). □

定理6.5 设 G 是局部紧群， μ, ν 是 G 上两个左 Haar 测度. 那么，存在一个正数 a, 使得 $\mu = a\nu$.

证 取定一个 $g \in \mathrm{C_c}(G)$, 使 $g \geq 0$ 且 g 不恒为零. 对于任意的 $f \in \mathrm{C_c}(G)$, 令

$$h(x,y) = \frac{f(x)g(yx)}{\int_G g(tx)\,d\nu(t)}, \quad (x,y) \in G \times G.$$

那么 h 是 $G\times G$ 上的具有紧支集的连续函数. 不难验证下面的涉及交换积分次序的运算是合理的， (参阅本章 §5). 首先，

$$\int\left[\int h(x,y)\,d\nu(y)\right]d\mu(x) = \int f(x)\frac{\int g(yx)\,d\nu(y)}{\int g(tx)\,d\nu(t)}d\mu(x)$$

$$= \int f(x)\,d\mu(x) = \int\left[\int h(x,y)\,d\mu(x)\right]d\nu(y)$$

$$\int\left[\int \frac{f(x)g(yx)}{\int g(tx)\,d\nu(t)}d\mu(x)\right]d\nu(y)$$

$$= \int\left[\int \frac{f(y^{-1}x)g(x)}{\int g(ty^{-1}x)\,d\nu(t)}d\mu(x)\right]d\nu(y)$$

接着，交换积分次序，这些积分等于

$$\int\left[\int \frac{f(y^{-1}x)g(x)}{\int g(ty^{-1}x)\,d\nu(t)}d\nu(y)\right]d\mu(x)$$

$$= \int\left[\int \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int g(ty^{-1})\,d\nu(t)}d\nu(y)\right]d\mu(x)$$

$$= \int g(x)\,d\mu(x)\cdot\int \frac{f(y^{-1})}{\int g(ty^{-1})\,d\nu(t)}d\nu(y)$$

记

$$\lambda(f,g;\nu)=\int \frac{f(y^{-1})}{\int g(ty^{-1})\,d\nu(t)}\,d\nu(y).$$

得

$$\int f\,d\mu=\int g\,d\mu\cdot\lambda(f,g;\nu)$$

于此式中将 μ 换为 ν, 得到

$$\int f\,d\nu=\int g\,d\nu\cdot\lambda(f,g;\nu)$$

令 $a=\dfrac{\int g\,d\mu}{\int g\,d\nu}$. 那么

$$\int f\,d\mu=a\cdot\int g\,d\nu\cdot\lambda(f,g;\nu)=a\int f\,d\nu.$$

显然 $a>0$, 与 f 无关；而 $f\in\mathcal{C}_c(G)$ 是任意的，由此推出 $\mu=a\nu$.
□

(四) Haar 测度的性质

我们再次强调，我们谈到拓扑群时，都认为这个群的拓扑是 Hausdorff 拓扑.

若 μ 是群上的测度， A 是可测集，则定义 $\check{\mu}(A)=\mu(A^{-1})$. 若 μ 是 Radon 测度，则易见 $\check{\mu}$ 也是 Radon 测度.

定理6.6 设 G 是局部紧群， μ 是 G 上的 Radon 测度. 那么 μ 是左 Haar 测度 $\Longleftrightarrow$ $\check{\mu}$ 是右 Haar 测度.

证明是平庸的，从略. □

由定理 6.5 和定理 6.6 可知，诸右 Haar 测度彼此互为倍数. 其实，由于我们涉及左 Haar 测度的讨论并不依赖于群 G 的左乘的具体性质，所以全部的讨论只须把“左”换为“右”便可完全适用于右 Haar 测度.

定理6.7 设 G 是局部紧群，μ 是 G 上的左 Haar 测度. 那么 μ 是有限测度 $\Longleftrightarrow$ G 是紧致的.

证 设 $\mu(G) < \infty$. 取一个紧集 K, 使 $\mu(K) > 0$. 作紧集族 $\{xK : x \in G\}$. 可归纳地取出有限个 x_iK, $i = 1, \cdots, n$ 使得它们彼此不交，且任何其它一个 xK 必与 $\bigcup_{i=1}^{n}(x_iK)$ 相交. (否则将与 $\mu(G) < \infty$ 矛盾). 这样一来,

$$G = \bigcup_{i=1}^{n}(x_iK) \cdot K^{-1}$$

是紧致的. □

设 G 是局部紧群，μ 是 G 上的左 Haar 测度. 由于映射 $u \mapsto ux$(固定 $x \in G$) 是 G 的自同胚，所以由 $\mu_x(A) = \mu(Ax)$ 定义了 G 上一个 Radon 测度. 由于 μ 是左平移不变的，所以 μ_x 也具此性质，从而 μ_x 也是一个左 Haar 测度，那么有，$\mu_x = \Delta(x)\mu$, $\Delta(x)$ 是一个与 x 有关的正数. 现设 ν 是 G 上的另一个左 Haar 测度，那么有正数 a, 使 $\nu = a\mu$. 于是

$$\nu_x = a\mu_x = a\Delta(x)\mu = \Delta(x)\nu.$$

可见 $\Delta(x)$ 与 μ 的选取无关，是唯一决定于群 G 的.

定义6.3 G 上的上述正值函数 $\Delta(x)$ 叫作 G 的 **右模函数**.

设 f 是 G 上的函数. 用 f_x 表示 f 的右平移 $x(x \in G)$, 即

$$f_x(t) = f(tx^{-1}), \quad t \in G.$$

类似地，${}_xf$ 表示 f 的左平移 x, 即 ${}_xf(t) = f(x^{-1}t)$, $t \in G$. 若 A 是局部紧群 G 的 Borel 集，μ 是 G 上的左 Haar 测度，$\Delta(x)$ 是 G 的右模函数，那么由 $(\chi_A)_x = \chi_{Ax}$ 知

$$\int_G (\chi_A)_x \, d\mu = \mu(Ax) = \Delta(x)\mu(A) = \Delta(x)\int_G \chi_A \, d\mu.$$

于是，对于非负 Borel 可测函数或 μ 可积函数 f, 有

$$\int f_x \, d\mu = \Delta(x) \int f \, d\mu,$$

$$\left(或 \int f(t) \, d\mu(t) = \Delta(x) \int f(tx) \, d\mu(t) \right).$$

定理6.8 设 G 是局部紧群， Δ 是 G 的右模函数. 那么

(1) Δ 是连续的；

(2) $\forall x, y \in G$. $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$.

证 取左 Haar 测度 μ, 并取非负的 $f \in \mathrm{C_c}(G)$ 使 f 不恒为零. 记 $a = \int f \, d\mu > 0$. 并记 $K = \operatorname{supp} f$. 固定 $x_0 \in G$, 我们来证 Δ 在 x_0 处连续.

任给 $\varepsilon > 0$, 由 f 的一致连续性 (见定理 6.2), 存在幺元 e 的邻域 V_ε, 使当 $s \in tV$ 时,

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

并可认为 $\overline{V}_\varepsilon$ 是紧的，且 $V_\varepsilon = V_\varepsilon^{-1}$. 那么，当 $x \in V_\varepsilon x_0$ 时，

$$tx^{-1} \in (tx_0^{-1})V_\varepsilon.$$

从而

$$|f(tx^{-1}) - f(tx_0^{-1})| < \varepsilon, \quad \forall t \in G.$$

当 $t \notin K\overline{V}_\varepsilon x_0$ 时， $tx_0^{-1} \notin K\overline{V}_\varepsilon$ 且对于 $x \in V_\varepsilon x_0$ 有 $x^{-1} \in x_0^{-1} V_\varepsilon$ 从而， $tx^{-1} \notin K$. 于是此时

$$f(tx^{-1}) = f(tx_0^{-1}) = 0.$$

得

$$\begin{aligned} &\left| \int f(tx^{-1}) \, d\mu(t) - \int f(tx_0^{-1}) \, d\mu(t) \right| \\ &\leq \int |f(tx^{-1}) - f(tx_0^{-1})| \, d\mu(t) \\ &\leq \varepsilon \cdot \mu(K\overline{V}_\varepsilon x_0). \end{aligned}$$

对一切 $\varepsilon \in (0,1)$, 可认为 $V_\varepsilon \subset V_1$. 那么 $\mu(K\overline{V}_1x_0)$ 是与 $\varepsilon \in (0,1)$ 无关的常数, 从而证得

$$\int f(tx^{-1})\,d\mu(t) = \Delta(x)a$$

在 x_0 的连续性, 结论 (1) 证毕.

对于任意的 Borel 集 A, 有

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu(Axy) = \Delta(y)\mu(Ax) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A).$$

这就证明了结论 (2). □

显然, 我们可以用对称的方式来定义左模函数 $\delta(x)$, 并且不难验证, $\delta(x) = [\Delta(x)]^{-1} = \Delta(x^{-1})$. 因此, 只研究右模就够了.

定义6.4 若局部紧群 G 的右模函数 $\Delta(x)$ 恒等于 1, 则称 G 是么模的 (unimodular).

显然, 局部紧群 G 是么模的 $\Longleftrightarrow$ 它的每个左 Haar 测度都是右 Haar 测度, 从而是 **Haar** 测度.

每个交换的局部紧群是么模的.

定理6.9 紧群是么模的.

证 设 $\Delta(x)$ 是紧群 G 的右模函数. 那么,

$$\forall x \in G,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta(x^n) = [\Delta(x)]^n.$$

若有 $x \in G$, 使 $\Delta(x) \neq 1$, 则 $\Delta(x)$ 与 $\Delta(x^{-1})$ 中有一个大于 1. 那么 Δ 是紧集 G 上的连续且无界的函数, 这是不可能的. □

下述论断是明显的.

定理6.10 设 G 是局部紧群, μ 是 G 上的左 Haar 测度. 那么, 对于每个 $A \in \mathcal{B}(G)$, 有

$$\check{\mu}(A) = \int_A \Delta(x^{-1})\,d\mu(x).\square$$

习　题

1. 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数构成的加法群，承袭 $\mathbb{R}$ 的拓扑，也就是说，具有 $\mathbb{R}^n$ 的相关拓扑 (见 [11]). 证明在 $\mathbb{Q}$ 上不存在非零的平移不变的 Radon 测度
2. 设 G 是正实数的乘法群，承袭 $\mathbb{R}$ 的拓扑，证明公式 $\mu(A) = \int_A \frac{1}{x} dx$ 定义 G 上的一个 Haar 测度
3. 设 G 是局部紧群，μ 是 G 上的左 Haar 测度，证明：G 的拓扑是离散的 $\Longleftrightarrow$ 对于某 $x \in G$, $\mu(\{x\}) > 0$.,
4. 设 G 是局部紧群，μ 是右 Haar 测度，Δ 是右模函数，证明：对于每个可测集 A, $\mu(xA) = \Delta(x^{-1})\mu(A)$ $(x \in G)$.
5. 设 G 是局部紧群，μ 是左 Haar 测度，证明：G 是么模的 $\Longleftrightarrow$ $\mu = \check{\mu}$.
6. 设 G 是局部紧群，μ 是左 Haar 测度，证明：μ 是 σ 有限的 $\Longleftrightarrow$ G 是 σ 紧的.
7. 设 G 是局部紧群，μ 是左 Haar 测度，ν 是右 Haar 测度，证明：若可测集 A 使 $\mu(A) = 0$, 则必有 $\nu(A) = 0$.

第二篇 $\mathbb{R}^n$ 上的实分析

本篇内容是大学“实变”课程的深入和发展，侧重点是介绍 $\mathbb{R}^n$ 上实分析的近代理论和方法. 为贯彻这一宗旨，我们选择的内容中强调了算子插值和极大函数这两个理论的重要作用. 这个作用一直贯穿在后面几章的内容中. 详细地说，我们把算子插值的理论看成是建立各种积分变换范数不等式的强有力的工具，而把极大函数看成是处理收敛 (a.e. 收敛，非切向收敛) 问题的有效方法. 这些理论和方法正体现了现代分析发展中最本质的东西.

从另一方面来说，$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 理论不仅为第一篇第一章的抽象积分论提供了最重要的实例，同时，也为第一篇第二章的局部紧 Hausdorff 空间上的理论提供了一个具有可数基的最重要的实例.

在这一篇中，我们用 m 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，常把在 Lebesgue 积分号下的积分元 $dm(x)$ 简记为 dx. 当提到可测集或可测性时，若无说明，总是指的 Lebesgue 可测集或 Lebesgue 可测性.

对于可测集 E, 记号 mE, $m(E)$, $|E|$ 都用来表示它的测度. 而对于 $\mathbb{R}^n$ 的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 记号 $|x|$ 表示它的 Euclid 范数，即 $|x|=(x_1^2+\cdots,+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

第一章　$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 积分

§1.　线性变换下的积分计算公式

在讨论直线 $\mathbb{R}$ 上的 Riemann 积分的变量替换公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

时，自然要涉及到函数 (变换)$\varphi:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的性质. 如果我们考虑的是 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 积分的变量替换公式时，首先要求变换 $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 具有这样的性质：T 能将定义域 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集映射为值域 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集.

定义1.1 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，T 是 A 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射，以下总把这样的映射叫做 A 上的变换. 若 T 总把可测集映成可测集，则称 T 为可测变换.

应当指出：即使变换 T 是连续的，它也不一定是可测的. 例如，记 C 为直线上的 Cantor 集：

$$C = \{x \in [0,1]:\ x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j},\ a_j = 0, 2, \forall\, j \in \mathbb{N}\}.$$

定义变换 $T:\ C \longrightarrow [0,1]$ 为

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j-1},\ \text{当}\ x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \in C.$$

则易证 T 为 C 到 $[0,1]$ 上的满的连续映射. 现在，从 $[0,1]$ 中取一不可测集 E. 由 $C_0 = T^{-1}(E) \subset C$ 可知 $m(C_0) = 0$. 此表明连续

映射 T 把 $\mathbb{R}$ 中的可测集 C_0 映射为 $\mathbb{R}$ 中的不可测集 E. 然而，如对变换 T 的要求稍稍加强，便可避免上述现象的发生.

定义1.2 设 T 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 上的变换. 如果 T 满足条件：

$$\forall x,\ y \in A,\ |Tx - Ty| \le c|x - y| \tag{L}$$

其中 $c > 0$ 与 x, y 无关，则称 T 为 A 上的 Lipschitz 变换，简称为 Lip 变换.

注 显然，条件 (L) 蕴含着连续性. 所以， Lip 变换一定是连续的. 提醒一句，一个变换叫做是连续的，如果开集的原象总是开集.

定理1.1 可测集上的 Lip 变换是可测变换.

证 设 T 为可测集上的 Lip 变换.

首先，由 T 的连续性易证： T 将紧集映成紧集 (其证明留给读者). 由于 F_σ 集是紧集的可数并，所以， T 把 F_σ 集映射为 F_σ 集.

其次，当 T 为 Lip 变换时， T 将零测度集映射成零测度集. 事实上，设 I 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任一立方体，由 Lip 变换的定义，有常数 $c > 0$ 使

$$m^*(TI) \le c|I|$$

其中 m^* 代表 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度. 设 $m(Z) = 0$, 则存在一列闭立方体 $\{I_k\}$, 使得 $\bigcup\limits_k I_k \supset Z$ 以及 $\sum\limits_k |I_k| < \varepsilon$. 此时, $\bigcup\limits_k TI_k \supset TZ$, 且

$$m^*(TZ) \le \sum m^*(TI_k) \le c\sum |I_k| < c\varepsilon.$$

于是 $m(TZ) = 0$.

最后，设 E 为 T 的定义域内的任意的可测集. 显然， E 可表示成 $E = H \cup Z$, 其中 H 为 F_σ 集，且 $m(Z) = 0$. 于是 TH 为 F_σ 集， $m(TZ) = 0$, 以及 $TE = TH \cup TZ$ 便表明 TE 为可测集. □

本节，我们只限于考虑一类最简单的 Lip 变换 — 线性变换．对于线性变换 T, $m(E)$ 和 $m(TE)$ 之间有着简单的数量的关系．

定理1.2 设 $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为可逆的线性变换且 E 为可测集．则

$$m(TE) = |\det T| m(E).$$

注 对于可测集 E, 定义

$$\mu(E) = m(TE).$$

那么，μ 显然是测度．定理 1.2 说的是，$\mu \ll m$, μ 是 σ 有限的，且 Radon–Nikodym 导数

$$\frac{d\mu}{dm} = |\det T|.$$

证 我们知道，一个线性变换 T 可以用一个 $n\times n$ 阶的方阵来表示．设 $T=(a_{ij})_{n\times n}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 则

$$Tx = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^n a_{in}x_i\right).$$

现在，让我们考虑三种特殊的线性变换 (初等变换):

(a) T_1 只将 x 的一个分量乘以非零的常数倍 α, 而其它分量不变．

(b) T_2 只将 x 的一个分量添加另外一个分量的非零常数倍，而其它分量不变．

(c) T_3 只将 x 的两个分量交换一下位置，而其它分量不变．

这三种线性变换有以下简单的性质：

$$\det T_1 = \alpha,\ \det T_2 = 1 \text{ 以及 } \det T_3 = -1.$$

由线性代数的知识，如果 T 为一可逆的线性变换，则 T 可表为 $T = T^{(1)}T^{(2)}\cdots T^{(m)}$, 其中任一 $T^{(k)}$, $1\le k\le m$, 必为 T_1,T_2 和

T_3 这三者之一. 因此，只须证明定理的结论对初等变换 T 成立即可.

如果 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的各边分别与各坐标轴平行的方体， T 是初等变换，则明显地

$$m(TQ) = |\det T| m(Q).$$

于是，由测度的定义知，对于任意的可测集 E

$$m(TE) \leq \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(TQ_k): \quad Q_k\text{为方体，且} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \supset E \Big\} = |\det T| m(E).$$

显然， T^{-1} 是与 T 同类的初等变换. 对变换 T^{-1} 及可测集 TE 使用上式，我们得到反向的不等式：

$$m(T^{-1}TE) = m(E) \leq |\det T^{-1}| m(TE).$$

从而完成了定理的证明. □

下面，我们来考虑积分的变量替换的问题.

引理1.3 设 A, B 都是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集， T 是 A 到 B 的可逆变换，且 T 和 T^{-1} 都是可测的. 在 A 上定义测度 ν:

$$\text{对于可测集} E \subset A, \quad \nu(E) = m(TE).$$

则对于 B 上的任意的非负可测函数 f,

$$\int_A f(Tx) d\nu(x) = \int_B f(x) dx.$$

证 只需对于特征函数 $f = \chi_E$, $E \subset B$ 进行证明. 而这由下式给出：

$$\int_B \chi_E(x) dx = m(E) = \nu(T^{-1}E) = \int_A \chi_E(Tx) d\nu(x). \square$$

现在我们来考虑线性变换下的积分计算问题.

定理1.4 设 $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是可逆的线性变换. 若 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)\,dx.$$

证 定义 ν 如引理 1.3. 那么, 根据该引理

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

但由定理 1.2 可知, ν 是 σ 有限的, $\nu \ll m$ 且

$$\frac{d\nu}{dm} = |\det T|.$$

所以, 根据 Radon–Nikodym 定理 (见第一篇第一章 §5), 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)d\nu(x) = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)dx. \square$$

推论1.5 Lebesgue 测度 m 在正交变换 ρ 下不变, 意即 $m(\rho E) = m(E)$.

证 设 ρ 为正交变换, 即线性变换 ρ 满足 $\rho\rho^* = I$, 其中 ρ^* 为 ρ 的转置变换, I 为恒等变换. 于是, $|\det \rho| = 1$. 从而, 由定理 1.2 便推得结论. □

推论1.6 设 δ_a 为伸缩变换: $x \longrightarrow ax$, 其中 $a > 0$, 则

$$m(\delta_a E) = a^n m(E).$$

证 由 $|\det \delta_a| = a^n$ 和定理 1.2 推得. □

§2. 正则变换下的积分计算公式

本节的目的是要把 §1 中线性变换下的积分变量替换公式推广到适用于更一般的连续变换的情形中.

定义2.1 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 的开集，变换 $T:V\longrightarrow\mathbb{R}^n$, 可以表示成

$$T(x)=(t_1(x),t_2(x),\cdots,t_n(x)),\quad x\in V,$$

其中，每一 $t_j(x)$ 为定义于 V 上的函数 $(1\le j\le n)$. 若每一 $t_j(x)$ 具有一阶的连续偏导数 $\frac{\partial t_j}{\partial x_i}(x)$, $1\le i,j\le n$. 即 $t_j\in C^1(V)$, $j=1,\cdots,n$, 则称 T 为 V 上的 C^1 变换. 这时 $n\times n$ 个偏导数所构成的方阵记作 $D(T)(x)$:

$$D(T)(x)=\left(\frac{\partial t_j(x)}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le n}\qquad x\in V.$$

并象在多元微分学中那样，记 $J_T(x)=\det D(T)(x)$, 叫做 T 的 Jacobi 式.

定义2.2 设 T 是 $V\subset\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 变换. 若 T 为单射，且对于每点 $x\in V$, $J(T)(x)\ne 0$, 则称 T 为 V 上的正则 (regular) 变换.

注 由多元微分学可知 (可参阅 W.Fleming, Functions of several variables,Springer-Verlag, 1977, 140 页), 如果 T 为 V 上的正则变换，则 $T^{-1}:T(V)\longrightarrow V$, 必是 $T(V)$ 上的正则变换，且

$$\forall\, x\in T(V)\quad D(T^{-1})(x)\cdot D(T)(T^{-1}x)=I.$$

其中 I 代表单位方阵.

我们首先关心的是正则变换 T 是否可测变换.

引理2.1 C^1 变换是可测变换.

证 由 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑性质 (它是 LCHS) 可知，任何开集 V 都可以写成如下形式:

$$V=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k,\ \text{其中 } B_k \text{ 为半径有限的开球，且}\overline{B}_k\subset V.$$

令

$$M_k=\max\left\{\left|\frac{\partial t_j(x)}{\partial x_i}\right|:\quad x\in\overline{B}_k,\ i,j=1,\cdots,n\right\}.$$

显然， $M_k < \infty$. 此时，由中值定理

$$\forall x, x' \in \overline{B}_k, |t_j(x) - t_j(x')| \leq nM_k|x - x'|, \quad j = 1, \cdots, n.$$

于是，

$$\forall x, x' \in \overline{B}_k, \quad |T(x) - T(x')| \leq n^2 M_k|x - x'|.$$

这表明， T 是 B_k 上的 Lip 变换. 从而 T 把 B_k 的可测子集变换成可测集. 此事对于每个自然数 k 成立. 故由 V 的上述表示断定 T 是 V 上的可测变换. □

定义2.2 设 $M(x) = \Big(m_{ij}(x)\Big)_{n\times n}$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的方阵. 记

$$|M(x)| = \max\Big\{\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}(x)|: \quad i = 1, \cdots, n\Big\};$$

$$\|M\|_E = \sup\Big\{|M(x)|: \quad x \in E\Big\}.$$

引理2.2 设 $x^o = (x_1^o, \cdots, x_n^o) \in \mathbb{R}^n$, $0 < h < \infty$,

$$Q = \{(x_1, \cdots, x_n): \quad x_j^o - h \leq x_j < x_j^o + h, \ j = 1, \cdots, n\}.$$

若 T 是开集 V 上的 C^1 变换，且 $\overline{Q} \subset V$, 则 TQ 被包含在以 Tx^o 为中心， 以 $2h\|D(T)\|_Q$ 为边长的闭方体内.

证 设 $Tx = t_1(x), \cdots, t_n(x)$, $x \in V$. 由微分中值定理知，对于每点 $x \in Q$, 和 $i \in \{1, \cdots, n\}$, 在 x 和 x^o 的联线上，存在一点 y^i, 使

$$t_i(x) - t_i(x^o) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial t_i}{\partial x_j}(y^i)(x_j - x_j^o).$$

因此，

$$|t_i(x) - t_i(x^o)| \leq h \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n}|\frac{\partial t_i}{\partial y_j}(y)|: \quad y \in Q\Big\}.$$

由此证得所需之结论. □

定理2.3 设 T 是开集 V 上的正则变换. 定义 ν 如引理 1.3, 即: 对于可测集 $E\subset V$

$$\nu(E)=m(TE).$$

那么, ν 是 σ 有限测度, $\nu\ll m$ 且 Radon-Nikodym 导数

$$\frac{d\nu}{dm}(x)=|J_T(x)|,\quad x\in V.$$

证 我们首先证明, 对于形如引理 2.2 所述的方体 Q, 只要 $\overline{Q}\subset V$, 就有

$$\nu(Q)\le\int_Q|J_T(x)|dx. \tag{1}$$

设 Q 是这样的方体. 根据有关函数在紧集 $\overline{Q}$ 上的一致连续性, $\forall\varepsilon\in(0,\frac{1}{4})$, $\exists\delta>0$, 使得只要 $x,y\in Q$ 且 $|x-y|<\delta$ 就有

$$\left|\big(D(T)(y)\big)^{-1}\big(D(T)(x)-D(T)(y)\big)\right|<\varepsilon. \tag{2}$$

取 $m\in\mathbb{N}$ 充分大, 使 $\frac{2h}{m}<\frac{\delta}{n}$. 把 Q 等分成 $N=m^n$ 小块. 每小块表达式如下:

$$\begin{aligned}\{(x_1,\cdots,x_n):\ x_j^o-h+&\frac{2(k_j-1)h}{m}\\&\le x_j<x_j^o-h+\frac{2k_jh}{m},\ j=1,\cdots,n\}\end{aligned}$$

其中 $(k_1,\cdots,k_n)\in\{1,\cdots,m\}^n$. 我们把这些小块记作 Q_k, $k=1,\cdots,N$. 把 Q_k 的中心记作 x^k.

证明的基本思想是, 在小块 Q_k 上, 定义线性变换

$$L_k=D(T)(x^k),\qquad k=1,\cdots,N,$$

以线性变换 L_k 与一个适当的平移的复合, 作为 T 在 Q_k 上的近似.

条件 $J_T(x)\neq 0$ 保证 L_k^{-1} 存在. 显然, $L_k^{-1}T$ 仍是 V 上的 C^1 变换. 我们现在来验证, 在 Q_k 上 (当 m 非常大时) 它与一个适当平移的复合确实近似于恒等变换 I. 定义

$$\Delta_k = L_k^{-1}T - I = L_k^{-1}(T - L_k), \quad a^k = \Delta_k(x^k), \qquad k = 1, \cdots, N.$$

定义变换 δ_k:

$$\forall x \in V, \quad \delta_k(x) = \Delta_k(x) - a^k, \qquad k = 1, \cdots, N.$$

我们看到, δ_k 仍是 C^1 变换, 且

$$\forall x \in V, \quad L_k^{-1}T(x) = I(x) + \delta(x) + a^k. \tag{3}$$

根据微分法则及矩阵乘法法则, 我们有

$$D(\delta_k) = D(\Delta_k) = L_k^{-1}(D(T) - L_k).$$

注意到 L_k 的定义, 以及当 $x \in Q_k$ 时

$$|x - x^k| < \frac{2nh}{m} < \delta,$$

根据 (2), 我们得到

$$\|\delta_k\|_{Q_k} \le \varepsilon, \qquad k = 1, \cdots, N.$$

同时, $\delta_k(x^k) = O$(坐标原点). 那么, 根据引理 2.2, $\delta_k(Q_k)$ 落在一个以原点为中心, 边长为 $\frac{2h}{m}\varepsilon$ 的方体中. 于是, 根据 (3), $L^{-1}TQ_k$ 必然落在一个以 a^k 为中心, 边长为 $(1+2\varepsilon)\frac{2h}{m}$ 的方体中. 这样一来,

$$m(L_k^{-1}TQ_k) \le (1+2\varepsilon)^n m(Q_k), \quad k = 1, \cdots, N. \tag{4}$$

根据引理 1.2, 对于 $k = 1, \cdots, N$

$$\nu(Q_k) = m(L_k L_k^{-1} TQ_k) = |\det L_k| m(L^{-1}TQ_k). \tag{5}$$

把 (4),(5) 合起来，并注意到 $\det L_k = J_T(x^k)$, 我们得到

$$\nu(Q) \leq (1+2\varepsilon)^n \sum_{k=1}^{N} |J_T(x^k)| m(Q_k). \tag{6}$$

易见，式中的和恰是积分 $\int_Q |J_T(x)|dx$ 的一个 Riemann 和. 于 (6) 中令 $N \to \infty$, 就得到

$$\nu(Q) \leq (1+2\varepsilon)^n \int_Q |J_T(x)|dx.$$

再令 $\varepsilon \to 0$, 我们终于得到 (1).

定义 μ:

$$\text{对于可测集 } E \subset V, \qquad \mu(E) = \int_E |J_T(x)|dx.$$

根据 (1) 我们推出，对于任意的可测集 $E \subset V$

$$\nu(E) \leq \mu(E). \tag{7}$$

由此断定， ν 是 σ 有限测度，且 $\nu \ll m$. 从 (7), 根据 Radon-Nikodym 定理，我们知道，对于 TV 上的任意的非负可测函数 f,

$$\int_V f(Tx)d\nu(x) \leq \int_V f(Tx)d\mu(x) = \int_V f(Tx)|J_T(x)|dx.$$

由引理 1.3,

$$\int_V f(Tx)d\nu(x) = \int_{TV} f(x)dx.$$

于是

$$\int_{TV} f(x)dx \leq \int_V f(Tx)|J_T(x)|dx. \tag{8}$$

由于 T 是正则变换，可以对 T^{-1} 使用 (8). 那么我们得到

$$\int_{TV} f(x)|J_T(T^{-1}x)||J_{T^{-1}}(x)|dx \geq \int_V f(Tx)|J_T(x)|dx.$$

然而 (见定义 2.1 的注):

$$|\forall x \in TV \quad |J_T(T^{-1}x)||J_{T^{-1}}(x)| = 1.$$

所以, (8) 实为等式, 也就是说, (7) 实为等式. □

作为定理 2.3 和引理 1.3 的直接结果, 我们得到下述积分变量替换公式.

定理2.4 设 T 是定义在 V 上的正则变换. 若 $f \in L(TV)$, 则

$$\int_{TV} f(x)dx = \int_V f(Tx)|J_T(x)|dx.$$

§3. 球坐标下的积分计算公式

设 $n \geq 2$. 定义

$$\Sigma_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = 1\}$$

设 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度. 我们声明过, 在本篇中, 提到 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度时, 指的就是实变函数论课程中详细讨论过的通常的 Lebesgue 测度. 把 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集全体记为 $\mathcal{M}$. 那么 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$ 是一个 σ 有限的测度空间. 记 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\backslash)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集族, m 限制在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\backslash)$ 上是 Radon 测度.

记 $X = \mathbb{R}^n - \{O\}$ (O 表示坐标原点); 记 $Y = (0, \infty \times \Sigma_{n-1}$. 对于每点 $x \in X$, 对应有唯一的一点 $(|x|, \frac{x}{|x|}) \in Y$. 把这个对应关系记作 φ, 即 $\varphi(x) = (|x|, \frac{x}{|x|})$. 显然, 这是一个可逆映射: $\varphi^{-1}(r, \xi) = r\xi$, $0 < r < \infty$, $\xi \in \Sigma_{n-1}$. 定义 Y 的开集是 X 的开集

在 φ 下的象. 那么 φ 是 X 到 Y 的同胚映射. 我们把 $\varphi(x)$ 叫做点 x 的球坐标 $(x \neq 0)$. 于是 X 与 Y 被 "依照 φ 等同" 起来.

定义3.1 设 $B \subset \Sigma_{n-1}$. 若 $\varphi^{-1}((0,1) \times E)$ 是 X 的可测集 ($\mathbb{R}^n$ 的可测集), 则称 E 是 Σ_{n-1} 的 (Lebesgue) 可测集. 把 Σ_{n-1} 上的可测集全体记作 $\mathcal{E}$. 在 $\mathcal{E}$ 上定义函数 σ:

$$\forall\, E \in \mathcal{E}, \quad \sigma(E) = n\, m(\varphi^{-1}((0,1) \times E)).$$

称 $\sigma(E)$ 为 E 的 (Lebesgue 测度).

注 我们可以只对 Σ_{n-1} 上的开集 G(它是 $\mathbb{R}^n$ 的开集与 Σ_{n-1} 的交) 定义 $\sigma(G) = n\, m((0,1] \times G)$. 然后, 基于 σ 定义 Σ_{n-1} 上的外测度 σ^*:

$$\sigma^*(E) = \inf\{\sigma(G) : G \text{ 为开集} G \supset E\}.$$

再按 Carathéodory 条件, 定义 Σ_{n-1} 上的可测集族及相应的测度. 但不难验证, 这样定义的球面测度, 与定义 3.1 给出的是完全一样的.

把 $(0,\infty)$ 中的可测集 ($\mathbb{R}$ 的可测集) 全体记作 $\mathcal{N}$. 在 $\mathcal{N}$ 上定义测度 ρ:

$$\forall\, A \in \mathcal{N}, \quad \rho(A) = \int_A r^{n-1} dr.$$

这里 dr 表示 $\mathbb{R}$ 的寻常 Lebesgue 测度元. 显然, ρ 关于 $(0,\infty)$ 上的 Lebesgue 测度是绝对连续的, ρ 是 σ 有限的, 完全的.

于是, 按第一篇中讲过的, 测度空间 $((0,\infty), \mathcal{N}, \rho)$ 和测度空间 $(\Sigma_{n-1}, \Phi, \sigma)$ 产生一个乘积测度空间 $(Y, \mathcal{M}', \rho \times \sigma)$.

定理3.1 按 "依照 φ 等同" 的观点,

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}, \qquad \rho \times \sigma = m.$$

证 记 $\mathcal{R}=\{A\times B:\ A\in\mathcal{N},\ B\in\mathcal{E}\}$, 是 Y 上的可测矩形族. 依 $\rho\times\sigma$ 的定义,

$$\rho\times\sigma(A\times B)=\rho(A)\,\sigma(B),\quad A\times B\in\mathcal{R}.$$

如果我们能证明

$$m\big(\varphi(A\times B)\big)=\rho(A)\,\sigma(B),\quad A\times B\in\mathcal{R},\tag{1}$$

那么就可断定 $\rho\times\sigma$ 与 m 在 $\mathcal{R}$ 上一致. 由此, 根据 $\mathbb{R}^n$ 的几何结构进一步断定外测度 $(\rho\times\sigma)^*=m^*$, 从而 $\mathcal{M}'=\mathcal{M}$, $\rho\times\sigma=m$. 所以我只需给出 (1) 的证明.

为此我们任意取定 $B\in\mathcal{E}$.

先考虑 $A=(a,b)$ $(0\le a<b<\infty)$ 的情形. 此时

$$A\times B=(0,b)\times B-(0,a]\times B.$$

所以

$$m\big(\varphi^{-1}(A\times B)\big)=m\big(\varphi^{-1}((0,b)\times B)\big)-m\big(\varphi^{-1}((0,a]\times B)\big).$$

记 $E(a)=\varphi^{-1}\big((0,a)\times B\big)$ $(a>0)$. 令 δ_a 为 $\mathbb{R}^n$ 上的伸缩变换 (见 §1). 那么, 根据推论 1.6 以及 σ 的定义,

$$m(E(a))=m(\delta_aE(1))=a^n\,m(E(1))=\frac{1}{n}a^n\sigma(B).$$

于是,

$$m\big(\varphi^{-1}(A\times B)\big)=\frac{1}{n}(b^n-a^n)\sigma(B)=\rho((a,b))\,\sigma(B).$$

由此断定, 在 $\mathcal{N}\times B$ 上 m 与 $\rho\times\sigma$ 一致.

由 B 之任意性, 进一步断定 m 与 $\rho\times\sigma$ 在 $\mathcal{R}$ 上一致, 从而完成了定理的证明. □

我们可以把定理 3.1 的结论写成 (按 "依照 φ 等同" 的意义)

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m) = \big((0,\infty) \times \Sigma_{n-1}, \mathcal{M}, \rho \times \sigma\big)$$

或简单地写 $m = \rho \times \sigma$.

推论3.2 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$. 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} f(r\xi)d\sigma(\xi)r^{n-1}dr. \tag{2}$$

这就是球坐标下的积分计算公式.

证 只需对特征函数进行证明.

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测集. 仍用 E 表示 $E - \{O\} \subset X$. 那么, 根据定理 3.1

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E\, dm &= \int_X \chi_E\, dm = m(E) \\ &= \rho \times \sigma\big(\varphi(E)\big) = \int_Y \chi_{\varphi(E)}(y)d(\rho \times \sigma)(y) \\ &= \int_Y \chi_E\big(\varphi^{-1}(y)\big)d(\rho \times \sigma(y).\end{aligned}$$

对于 $y = (r, \xi)$, 我们有 $\varphi^{-1}(y) = r\xi$. 注意到明显的等式

$$\frac{d(\rho \times \sigma)}{d(m \times \sigma)}(r, \xi) = r^{n-1},$$

我们就完成了证明. □

由推论 3.2, 我们直接得到下述公式.

推论3.3 设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$ 且 $f(x) = g(|x|)$. 则 $g \in L((0,\infty), \mathcal{N}, \rho)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \sigma(\Sigma_{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

满足 $f(x) = g(|x|)$ 的函数 f 叫作径向函数.

§4. 两个重要不等式的推广

在第一篇第一章 §3 中，我们已经建立了两个重要的积分不等式： Hölder 不等式和 Minkowski 不等式. 有时，我们需要用到它们的拓广形式. 为此，先考虑 Hölder 不等式的推广.

定理4.1 设

$$\frac{1}{p_1}+,\frac{1}{p_2}+,\cdots,\frac{1}{p_m}=1,\quad 1\le p_i\le\infty\quad (1\le i\le m).$$

若 $f_i\in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$, $1\le i\le m$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x)\cdots f_m(x)|dx\le\|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_m\|_{p_m}.$$

证 当 $m=2$ 时，即为 Hölder 不等式. 对于一般情形，我们只须考虑 $m=3$ 的情形. (对于 $m>3$ 的情形，证明方法相同). 由于

$$\left(\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}\right)^{-1}+p_3^{-1}=1,$$

所以使用 Hölder 不等式，就得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x)f_2(x)f_3(x)|\,dx$$

$$\le\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x)f_2(x)|^{\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}}\,dx\right)^{\frac{p_1+p_2}{p_1p_2}}\|f_3\|_{p_3}.$$

又因

$$\frac{p_2}{p_1-p_2}+\frac{p_1}{p_1+p_2}=1$$

对上式右端括号内的积分再次使用 Hölder 不等式，则得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x)f_2(x)|^{\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}}\,dx\le\|f_1\|_{p_1}^{\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}}\cdot\|f_2\|_{p_2}^{\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}}.$$

联立以上两式，便得所求. □

设 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 及 $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. 显然，Hölder 不等式

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx\right|\le \|f\|_p\|g\|_{p'}$$

表明：$\|f\|_p$ 是集合 $\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx\right| : \|g\|_{p'}=1\right\}$ 的上界. 但如对 $\|f\|_p\ne 0$, 取

$$g=\operatorname{sgn} f\,|f|^{p-1}\|f\|_p^{1-p},$$

便可看出,

$$\|g\|_{p'}=1,\quad \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx\right|=\|f\|_p.$$

这表明：

$$\|f\|_p=\sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx\right| : \|g\|_{p'}=1\right\}.$$

下面的事实是上述结论的更精确形式，且它在使用中更方便.

定理4.2 设 $1\le p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f\|_p=\sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx\right| : \|g\|_{p'}=1,\ g\in D\right\},$$

其中 D 为简单函数类.

证 因 $|f(x)|$ 为非负可测，故存在 $\varphi_m\in D$, 使得 $\varphi_m\nearrow|f|$. 如记

$$f_m=\varphi_m\operatorname{sgn} f,$$

则 $f_m\in D$, $|f_m|\le|f|$, 并且

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x)=f(x),\quad a.e.$$

如置

$$g_m = |f_m|^{p-1}\operatorname{sgn} f_m \|f_m\|_p^{1-p},$$

则 $g_m \in D$, $\|g_m\|_{p'} = 1$, 并且

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) g_m(x)\, dx \right| = \|f_m\|_p.$$

于是，由 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}
\|f\|_p = \|\lim f_m\|_p &\le \underline{\lim} \|f_m\|_p \\
&= \underline{\lim} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) g_m(x)\, dx \right| \\
&\le \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) g_m(x)|\, dx \\
&= \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) g_m(x)|\, dx \\
&= \underline{\lim} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_m(x)\, dx \right|.
\end{aligned}$$

因此

$$\|f\|_p \le \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx \right| :\ \|g\|_{p'} = 1,\ g \in D \right\}.$$

反向不等式是显然的，证毕. □

下面的定理是 Minkowski 不等式的拓广形式.

定理 4.3 (积分的 Minkowski 不等式) 设 $1 \le p < \infty$, $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 可测，$(m, n \in \mathbb{N})$. 那么

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\, dy \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

证 当 $p = 1$ 时，结论可由 Fibini 定理导出. 设

$$1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$0 \le g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\|g\|_{p'} = 1$. 由 Tonelli 定理及 Hölder 不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\, dy \right) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| g(x)\, dx \right) dy$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \cdot \|g\|_{p'}$$

于是

$$\sup_{\|g\|_{p'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\, dy \right) g(x)\, dx$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

这就是要证的不等式. □

习　题

1. 设 $X \subset \mathbb{R}$, 且 $m(Z) = 0$, 记 $W = \{x^2 : x \in Z\}$.
   证明 $m(W) = 0$.
2. 设 T 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lip 变换和 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 变换.
   证明
   $$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |J_T(x)| < \infty.$$
3. 设 T 是 V 上的 C^1 变换. 证明映射 $x \longrightarrow D(T)(x)$ 为一 V 上的连续映射.
4. 设 T 是可逆的线性变换. 证明 T 是正规变换，且
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad D(T)(x) = T.$$

5. 证明

$$\sigma(\Sigma_{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

6. 设 $a > 0$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a|x|^2)\, dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

7. 设

$$P(x) = c_n(1+|x|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}},$$

其中

$$c_n = \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2}).$$

证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\, dx = 1.$$

第二章　$L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的算子插值

在我们研究函数的时候，常常依照某种特定的法则 T, 把所研究的对象 f 转换为另一个函数 $T(f)$. 通过 $T(f)$ 的性质来反映 f 的性质. 我们把对应法则 (或映射)T 叫做**算子**. 例如，后面第三章至第五章中将要介绍的极大函数，卷积，Fourier 变换，分别涉及三类重要的算子. 在对于算子的研究中，有界性的问题是一个最基本的问题. 关于有界性的概念，有下述定义.

用 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数之全体. 用 L^p 代表 $L^p(\mathbb{R}^n)$, 它的范数 (当 $1 \le p \le \infty$ 时) 记作 $\|\ \|p$.

定义0.1 算子 T : $L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p, q \le \infty$, 称为 (p,q) 型的 (或是 (p,q) 有界的), 是指它满足不等式

$$\|T(f)\|_q \le C\|f\|_p,$$

其中，常数 C 同 f 无关. 满足上述不等式的最小常数 C 叫做 T 的 (p,q) 范数，记作 $\|T\|_{(p,q)}$.

定义0.2 算子 T: $L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}$, $1 \le p, q \le \infty$, 称为弱 (p,q) 型的 (或是弱 (p,q) 有界的), 是指

(i) 当 $1 \le q < \infty$ 时，有

$$\sup_{\alpha>0} \alpha\big[m(\{x \in \mathbb{R}^n : \ |T(f)(x)| > \alpha\})\big]^{\frac{1}{q}} \le C\|f\|_p,$$

(ii) 当 $q = \infty$ 时，有

$$\|T(f)\|_q \le C\|f\|_p,$$

其中，常数 C 同 f 无关，mE 表示集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的测度．把满足上述不等式的最小常数 C 叫做 T 的弱 (p,q) 范数，并记作 $\|T\|_{w(p,q)}$.

显然，当 $q=\infty$ 时，算子 T 为弱 (p,q) 型的等价于 T 为 (p,q) 型的．其次，由不等式

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |T(f)(x)|>\alpha\}}|T(f)(x)|^q\,dx\le\|T(f)\|_q^q$$

可知：(p,q) 型的算子必为弱 (p,q) 型的，且 $\|T\|_{w(p,q)}\le\|T\|_{(p,q)}$.

由于我们处理的算子 T 必定具有与函数的线性运算相关的一些性质，所以总要求 T 的定义域 X 是 $\mathcal{F}$ 的线性子集．我们指出，如果 $1\le p<r<q\le\infty$ 且 $X\supset L^p$，$X\supset L^q$，那么，由于每个 $f\in L^r$ 一定可以表示成

$$f=f_1+f_2,\quad f_1\in L^p,\ f_2\in L^q,$$

结果，作为线性集的 X 一定包含 L^r.

如果知道 T 在 L^p 和 L^q 上的某种有界性，可否判断 T 在 L^r 上的有界性？

这就是所谓的算子插值问题．

我们将在 §1 讨论线性算子的插值问题；而在 §2 讨论次线性算子的插值．

§1. Riesz–Thörin 定理

设 X 是 $\mathcal{F}$ 的线性子集．算子 T：$X\longrightarrow\mathcal{F}$ 叫作是线性的，如果

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ \forall f,g\in X,\quad T(af+bg)=aT(f)+bT(g).$$

定理1.1 (Riesz–Thörin) 设 $1\le p_j,q_j\le\infty$, $j=0,1$, $t\in(0,1)$,

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

又设 T 为一线性算子．若 T 为 (p_j,q_j) 型的， $j=0,1$, 则 T 也是 (p_t,q_t) 型的，且

$$\|T\|_{(p_t,q_t)} \le \|T\|^{1-t}_{(p_0,q_0)}\|T\|^t_{(p_1,q_1)}.$$

为证定理 1.1, 先证明两个引理．

引理1.2 (Phragmen-Lindelöf 三线定理) 设复值函数 F 在闭域

$$S=\{z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}:\ 0\le x\le 1\}$$

上连续且有界，而在 $\overset{\circ}{S}$ 内解析．若 F 在 S 的边界上满足

$$|F(\mathrm{i}y)|\le K_0,\quad |F(1+\mathrm{i}y)|\le K_1,\quad \forall\, y\in\mathbb{R},$$

则 F 在 $\overset{\circ}{S}$ 内满足

$$|F(x+\mathrm{i}y)|\le K_0^{1-x}K_1^x,\quad \forall\, x+\mathrm{i}y\in\overset{\circ}{S}.$$

证 不妨设 $K_0>0$, 及 $K_1>0$. 记

$$G(z)=\frac{F(z)}{K_0^{1-z}K_1^z}.$$

那末问题归结于证明如下的命题：若 G 在 S 上连续有界，而在 $\overset{\circ}{S}$ 内解析，且

$$|G(\mathrm{i}y)|\le 1,\quad |G(1+\mathrm{i}y)|\le 1,\quad \forall\, y\in\mathbb{R},$$

则

$$|G(x+\mathrm{i}y)|\le 1,\qquad \forall\, x+\mathrm{i}y\in\overset{\circ}{S}.$$

首先，考虑特殊情形：

$$\lim_{|y|\to\infty}\max\left\{|G(x+\mathrm{i}y)|:\quad x\in[0,1]\right\}=0.$$

在这种情况下，显然，存在一 $y_0>0$，使得

$$\text{当}x\in[0,1],\ |y|\geq y_0\text{时},\quad |G(x+\mathrm{i}y)|\leq 1. \tag{$*$}$$

从而，在以 $\mathrm{i}y_0$，$1+\mathrm{i}y_0$，$1-\mathrm{i}y_0$，$-\mathrm{i}y_0$ 为顶点的矩形 Q 的边界 ∂Q 上满足

$$|G(z)|\leq 1,\quad z\in\partial Q.$$

由解析函数最大模原理可知

$$|G(z)|\leq 1,\quad z\in Q.$$

其次，由 $(*)$ 得

$$|G(z)|\leq 1,\quad z\in S\setminus Q.$$

于是，对上述特殊的情形，引理结论成立.

对于一般情形，只须将上述的结果应用于函数

$$G_m(z)=G(z)e^{\frac{(z^2-1)}{m}}\quad (m\in\mathbb{N})$$

上，便得

$$\forall\, z\in S\quad |G_m(z)|\leq 1.$$

再令 $m\to\infty$，就得到

$$\forall\, z\in S,\qquad |G(z)|\leq 1.\square$$

引理1.3 若定理 1.1 的结论对于简单函数成立，则定理 1.1 成立.

证 无妨认为 $p_0\leq p_1$. 记

$$p=p_t,\ q=q_t;\quad k_0=\|T\|_{(p_0,q_0)},$$
$$k_1=\|T\|_{(p_1,q_1)},\quad M=k_0^{1-t}k_1^t.$$

设 $f \in L^p$. 定义

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 1\},$$
$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \le 1\};$$
$$f^0 = f\chi_E, \quad f^1 = f\chi_F.$$

显然,

$$f = f^0 + f^1; \quad f^0 \in L^{p_0} \bigcap L^p,\ f^1 \in L^{p_1} \bigcap L^p.$$

记 D 为一切可积简单函数的集合. 取 $g_m \in D$, $m \in \mathbb{N}$, 使得

$$\lim_{m\to\infty} \|g_m - f^0\|_p = 0; \quad g_m = g_m\chi_E.$$

同时取 $h_m \in D$, $m \in \mathbb{N}$, 使得

$$\lim_{m\to\infty} \|h_m - f^1\|_p = 0; \quad h_m = h_m\chi_F,\ h_m f^1 \ge 0.$$

由于

$$\|g_m - f^0\|_{p_0} \le |E|^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}} \|g_m - f^0\|_p;$$
$$\|h_m - f^1\|_{p_1} \le \left(\|h_m - f^1\|_p\right)^{\frac{p}{p_1}},$$

以及线性算子 T 的 (p_0, q_0), (p_1, q_1) 有界性, 我们得到

$$\lim_{m\to\infty} \left(\|T(g_m - f^0)\|_{q_0} + \|T(h_m - f^1)\|_{q_1}\right) = 0.$$

于是, $\{g_m\}$ 含有子列, 仍记之为 $\{g_m\}$, 满足

$$\text{对于几乎每个 } x \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{m\to\infty} |T(g_m)(x) - T(f^0)(x)| = 0.$$

同样地, $\{h_m\}$ 含有子列, 仍记之为 $\{h_m\}$, 满足

$$\text{对于几乎每个 } x \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{m\to\infty} |T(h_m)(x) - T(f^1)(x)| = 0.$$

这样一来，记 $f_m = g_m + h_m$，仍由 T 的线性性质，我们得到

$$\text{对于几乎每个 } x \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{m\to\infty} |T(f_m)(x) - T(f)(x)| = 0.$$

同时，显然有

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_p = \lim_{m\to\infty} \left(\|g_m - f^0\|_p^p + \|h_m - f^1\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

从而

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m\|_p = \|f\|_p.$$

根据假定，

$$\|T(f_m)\|_q \leq M\|f_m\|p, \quad m \in \mathbb{N}.$$

那么，使用 Fatou 定理 (见第一篇第一章定理 2.8)，我们得到

$$\|T(f)\|_q \leq \varliminf_{m\to\infty} \|T(f_m)\|_q \leq \varliminf_{m\to\infty} M\|f_m\|_p = M\|f\|_p.$$

证毕. □

定理 1.1 的证明 我们只对 $(p_0, p_1) \neq (\infty, \infty)$ 且 $(q_0, q_1) \neq (1, 1)$ 的情形给出证明. 其它情形的证明是类似的，留给读者.

我们约定，通篇中，记 p' 为 p 的共轭指数，即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.. 现在，记

$$\alpha_j = \frac{1}{p_j}, \quad \beta_j = \frac{1}{q_j} \qquad j = 0, 1;$$
$$\alpha = \frac{1}{p_t}, \quad \beta = \frac{1}{q_t};$$
$$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1, \quad \beta(z) = (1-z)\beta_0 + z\beta_1.$$

易知

$$\alpha(j) = \alpha_j, \quad \beta(j) = \beta_j \qquad j = 0, 1;$$
$$\alpha(t) = \alpha, \quad \beta(t) = \beta.$$

为简单起见，又记

$$\|T\|_{(p_i,q_i)} = k_i \quad i=0,1; \quad M = k_0^{1-t}k_1^t; \quad p_t = p \quad q_t = q.$$

使用上述记号，定理中要证的不等式便成为

$$\forall f \in L^p, \quad \|T(f)\|_q \le M\|f\|_p. \tag{1}$$

仍记 D 为一切可积简单函数的集合. 根据引理 1.3, 我们知道 (1) 式成立的充分必要条件是

$$\forall f \in D, \quad \|T(f)\|_q \le M\|f\|_p. \tag{1'}$$

由本篇第一章引理 4.2,

$$\|T(f)\|_q = \sup_{g\in D, \|g\|_{q'}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(u)g(u)\,du \right|.$$

因此，(1′) 式等价于

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(u)g(u)\,du \right| \le M, \ \forall\, f,g \in D, \ \|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1. \tag{2}$$

定义

$$\begin{aligned} f_z(u) &= e^{\mathrm{i}\arg f}|f(u)|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}, \\ g_z(u) &= e^{\mathrm{i}\arg g}|g(u)|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta}}, \\ F(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} T(f_z)(u)g_z(u)\,du. \end{aligned}$$

我们看到:

$$f_t(u) = f(u), \qquad g_t(u) = g(u).$$

于是，(2) 式等价于

$$|F(t)| \le M \qquad \forall\, f,g \in D, \ \|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1. \tag{3}$$

易见 $F(z)$ 是闭域 S 上的有界解析函数. 由引理 1.2, 为证 (3) 式, 只须验证

$$|F(\mathrm{i}y)| \le k_0, \quad |F(1+\mathrm{i}y)| \le k_1$$

这里, 只给出第一式的证明 (第二式的证明相类似). 事实上, 由 $\alpha(\mathrm{i}y) = \alpha_0 + \mathrm{i}y(\alpha_1 - \alpha_0)$, 以及 $1-\beta(\mathrm{i}y) = (1-\beta_0) - \mathrm{i}y(\beta_1 - \beta_0)$ 可知

$$\begin{aligned}|f_{\mathrm{i}y}(u)|^{p_0} &= \left|e^{\mathrm{i}\arg f}|f(u)|^{\frac{\alpha(\mathrm{i}y)}{\alpha}}\right|^{p_0} \\ &= \left||f(u)|^{\mathrm{i}y\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha}}|f(u)|^{\frac{p}{p_0}}\right|^{p_0} = |f(u)|^p,\end{aligned}$$

以及

$$|g_{\mathrm{i}y}(u)|^{q_0'} = |g(u)|^{q'}.$$

于是, 由定理的条件及 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}|F(\mathrm{i}y)| &\le \|Tf_{\mathrm{i}y}\|_{q_0}\|g_{\mathrm{i}y}\|_{q_0'} \\ &\le k_0\|f_{\mathrm{i}y}\|_{p_0}\|g_{\mathrm{i}y}\|_{q_0'} \\ &= k_0\|f\|_p^{\frac{p}{p_0}}\|g\|_{q'}^{\frac{q'}{q_0'}} = k_0.\end{aligned}$$

这就证实了 (3). 于是, (1) 式成立. □

§2. Marcinkiewicz 定理

定义 2.1 (拟线性算子) 设 T 是定义在 $\mathcal{F}$ 的一个线性子集 X 上的算子. 如果存在一个常数 $A>0$, 使得:

$$\begin{aligned}&\forall\, f_1,\ f_2 \in X,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &|T(f_1+f_2)(x)| \le A|T(f_1)(x)| + |T(f_2)(x)|,\end{aligned}$$

则称 T 为拟线性的 (quasi-linear), 当 $A=1$ 时，称 T 为次线性的 (sub-linear).

显然，线性算子必为次线性的.

定理2.1 (Marcinkiewicz) 设

$$\begin{aligned}&1\le p_j\le q_j\le\infty\ (j=0,1),\quad q_0\ne q_1,\\&t\in(0,1),\quad \frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1};\\&\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.\end{aligned}$$

又设 T 为次线性算子. 若 T 为弱 (p_j,q_j) 型的 $(j=0,1)$, 则 T 为 (p_t,q_t) 型的，且

$$\|T\|_{(p_t,q_t)}\le C\|T\|_{w(p_0,q_0)}^{1-t}\|T\|_{w(p_1,q_1)}^{t},$$

其中，常数 C 同 p_0,q_0,p_1,q_1 及 t 有关.

显然，如果仅仅比较定理 1.1 和定理 2.1 的条件，则定理 2.1 的条件较弱. 然而，这两个定理的结论一般是不可比较的. 因而，定理 2.1 并不是定理 1.1 的推广.

为简明起见，我们只对 $p_0=q_0=1$ 及 $p_1=q_1=\infty$ 的情形给出证明，对于一般的情形，证明方法相同. 我们把这一特殊情形下的结果写成定理 2.2.

定理2.2 设次线性算子 T 为弱 $(1,1)$ 型和 (∞,∞) 型的, $1<p<\infty$ 则 T 为 (p,p) 型的，且

$$\|T\|_{(p,p)}\le\frac{2p}{p-1}\|T\|_{w(1,1)}^{\frac{1}{p}}\|T\|_{(\infty,\infty)}^{1-\frac{1}{p}}.$$

证 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$. 任取 $\alpha>0$, 定义

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当}|f(x)\le\alpha,\\ \alpha\operatorname{sgn}f(x), & \text{当}|f(x)|>\alpha,\end{cases}$$

以及

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & 当|f(x)|\le\alpha,\\ (|f(x)|-\alpha)\cdot\operatorname{sgn} f(x), & 当|f(x)|>\alpha,\end{cases}$$

则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. 由 $\|f_1\|_\infty\le\alpha$ 以及

$$\begin{aligned}\|f_2\|_1&=\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>\alpha\}}(|f(x)|-\alpha)\,dx\\ &\le\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>\alpha\}}|f(x)|\,dx\\ &\le\|f\|_p(m\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>\alpha\})^{\frac{1}{p'}}\\ &\le\|f\|_p\Big(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\Big)^{\frac{p}{p'}}<\infty\end{aligned}$$

可知 $f_1\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 及 $f_2\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 记

$$k_0=\|T\|_{w(1,1)},\quad k_1=\|T\|_{(\infty,\infty)}.$$

由定理的条件可得

$$m\big(\{x\in\mathbb{R}^n:\ |T(f_2)(x)|>\alpha\}\big)\le k_0\frac{\|f_2\|_1}{\alpha},$$

以及

$$\|T(f_1)\|_\infty\le k_1\|f_1\|_\infty\le k_1\alpha.$$

于是,

$$\begin{aligned}&m\big(\{x\in\mathbb{R}^n:\ |T(f)(x)|>2k_1\alpha\}\big)\\ &\quad\le m\big(\{x\in\mathbb{R}^n:\ |T(f_2)(x)|>k_1\alpha\}\big)\le\frac{k_0}{k_1}\frac{\|f_2\|_1}{\alpha}.\end{aligned}$$

记 $\lambda_g(t)$ 为 g 的分布函数 (见第一篇第一章 §3). 那么

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_p^p&=p\int_0^\infty\beta^{p-1}\lambda_{|T(f)|}(\beta)\,d\beta\\ &=(2k_1)^p p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\lambda_{|T(f)|}(2k_1\alpha)\,d\alpha\end{aligned}$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
\|T(f)\|_p^p &\le (2k_1)^p p\frac{k_0}{k_1}\int_0^\infty \alpha^{p-1}\frac{\|f_2\|_1}{\alpha}\,d\alpha \\
&= (2k_1)^p p\frac{k_0}{k_1}\int_0^\infty \alpha^{p-2}\left(\int_0^\infty \lambda_{|f_2|}(t)\,dt\right)d\alpha \\
&= (2k_1)^p p\frac{k_0}{k_1}\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_0^\infty m\big(\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f_2(x)|>t\}\big)\,dt\,d\alpha.
\end{aligned}
$$

注意到 $|f_2(x)|>t$ 当且仅当 $|f(x)|>\alpha+t$, 于是有

$$
\begin{aligned}
\|T(f)\|_p^p &\le (2k_1)^p p\frac{k_0}{k_1}\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_\alpha^\infty \lambda_{|f|}(u)\,du\,d\alpha \\
&= (2k_1)^p p\frac{k_0}{k_1}\int_0^\infty \lambda_f(u)\left(\int_0^u \alpha^{p-2}\,d\alpha\right)du \\
&= (2k_1)^p \frac{p}{p-1}\frac{k_0}{k_1}\int_0^\infty u^{p-1}\lambda_{|f|}(u)\,du \\
&= 2^p\frac{1}{p-1}k_1^{p-1}k_0\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\|T(f)\|_p \le 2\left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} k_0^{\frac{1}{p}} k_1^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_p.
$$

当 $t>0$ 时, t^t 为 t 的增函数. 于是

$$
(p-1)^{p-1} \le p^p
$$

从而

$$
\left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{p}{p-1}.
$$

定理证毕. □

由不等式

$$
\begin{aligned}
&\alpha^q\big(m\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>\alpha\}\big) \\
&\quad\le \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>\alpha\}} |f(x)|^q\,dx \le \|f\|_q^q
\end{aligned}
$$

可知条件

$$\sup_{\alpha>0}\alpha\big(m\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>\alpha\}\big)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

弱于 $\|f\|_q<\infty$. 因此，产生如下的定义.

定义2.1 设 $1\le q<\infty$, $X\subset\mathbb{R}^n$. 若 X 上的可测函数 $f(x)$ 满足

$$\sup_{\alpha>0}\alpha\big(m\{x\in X:\ |f(x)|>\alpha\}\big)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

则称 f 属于弱 $L^q(X)$, 记作 $f\in WL^q(X)$, 规定

$$\|f\|_{WL^q(X)}=\sup_{\alpha>0}\alpha\big(m\{x\in X:\ |f(x)|>\alpha\}\big)^{\frac{1}{q}}.$$

并规定 $\|f\|_{WL^\infty}=\|f\|_{L^\infty}$.

根据这个定义，定义 0.2 (i) 中的不等式可简写成

$$\|T(f)\|_{WL^q}\le C\|f\|_p.$$

显然，$L^p(\mathbb{R}^n)\subset WL^p(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|f\|_{WL^p}\le\|f\|_p.$$

但有

定理2.3 设 $m(X)<\infty$. 若 $1\le p_1<p_2\le\infty$, 则 $WL^{p_2}(X)\subset L^{p_1}(X)$.

证 记 $\lambda_g(t)$ 为 g 的分布函数. 若 $g\in L^p(X)$, 则

$$\int_X|g(x)|^p\,dx=p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_{|g|}(t)\,dt,$$

其中

$$\lambda_{|g|}(t)=m\big(\{x\in X:\ |g(x)|>t\}\big).$$

设 $f \in WL^{p_2}(X)$, 即

$$\sup_{\alpha>0} \alpha\{\lambda_{|f|}(\alpha)\}^{1/p_2} = C < \infty.$$

那么

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^{p_1}\,dx &= p_1 \int_0^\infty t^{p_1-1}\lambda_{|f|}(t)\,dt \\ &= p_1 \int_0^1 t^{p_1-1}\lambda_{|f|}(t)\,dt + p_1 \int_1^\infty t^{p_1-1}\lambda_{|f|}(t)\,dt.\end{aligned}$$

由 $\lambda_{|f|}(t) \le m(X)$ 可知

$$\int_0^1 t^{p_1-1}\lambda_{|f|}(t)\,dt < \infty.$$

其次

$$\int_1^\infty t^{p_1-1}\lambda_{|f|}(t)\,dt \le \int_1^\infty t^{p_1-1}\Big(\frac{C}{t}\Big)^{p_2}\,dt < \infty.$$

于是, $f \in L^{p_1}(X)$.

注 本节关于 Marcinkiewicz 定理的讨论适用于拟线性算子. 我们对次线性算子进行讨论只是为使符号稍许简单.

§3. 应用

设 $K(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 在这一节我们研究形如

$$f \longrightarrow T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy$$

的线性算子 T, 式中的 f 是具有某种性质的可测函数. 算子 T 的型完全取决于 $K(x,y)$ 的性质.

定理3.1 设 $1 \le p \le \infty$. 若存在正数 C 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\,dx \le C,\ \ a.e.y \in \mathbb{R}^n;$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\,dy \le C,\ \ a.e.x \in \mathbb{R}^n,$$

则 T 为 (p,p) 型的算子，且

$$\|T\|_{(p,p)} \le C.$$

证 设 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 由不等式

$$|T(f)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\,dy\,\|f\|_\infty \le C\|f\|_\infty$$

可知 T 为 (∞,∞) 型的，且

$$\|T\|_{(\infty,\infty)} \le C.$$

又设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(f)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|\,dx|f(y)|\,dy \le C\|f\|_1$$

表明 T 为 $(1,1)$ 型的，且

$$\|T\|_{(1,1)} \le C.$$

于是，由 Riesz-Thörin 定理可知 T 为 (p,p) 型的，且

$$\|T\|_p \le C^{1-t}C^t = C.\square$$

定理3.2 设 $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$,

$$\|K(x,\cdot)\|_{WL^q} \le C,\ \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|K(\cdot,y)\|_{WL^q} \le C,\ \text{a.e. } y \in \mathbb{R}^n.$$

若 $1 \le p < q'$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$，则

(i) 当 $p=1$ 时，T 为弱 $(1,q)$ 型的；

(ii) 当 $1<p<q'$ 时，T 为 (p,r) 型的.

证 首先指出：如果能证明 $\forall\, 1 \le p < q'$，T 为弱 (p,r) 型的，那末 (i) 和 (ii) 均成立. 事实上，取 $p=1$ 便得 (i). 为证 (ii)，选取 $\widetilde{p}$，使 $p<\widetilde{p}<q'$ 并记 $\widetilde{r}=[\widetilde{p}^{-1}-(q')^{-1}]^{-1}$，则 $\widetilde{p}^{-1}+q^{-1}=\widetilde{r}^{-1}+1$. 于是，$T$ 为弱 $(\widetilde{p},\widetilde{r})$ 型的. 在 Marcinkiewicz 定理中取 $(p_0,q_0)=(1,q)$，$(p_1,q_1)=(\widetilde{p},\widetilde{r})$，可知 T 为 (p_t,q_t) 型的，但不难看出：存在一 $t\in(0,1)$，使得 $(p_t,q_t)=(p,r)$. 故 (ii) 成立.

下面证明：$\forall\, 1 \le p < q'$，T 为弱 (p,r) 型的.

设 $A>0$(待定). 定义

$$E=\{(x,y):\ |K(x,y)|>A\},$$
$$K_1(x,y)=\operatorname{sgn} K(x,y)[|K(x,y)|-A]\chi_E(x,y),$$

以及

$$K_2(x,y)=K(x,y)-K_1(x,y).$$

并定义

$$T_j(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x,y)f(y)dy, \qquad j=1,2.$$

那么显然，$T=T_1+T_2$.

首先指出：K_1 满足定理 3.1 的条件. 事实上

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x,y)|\,dx=\int_0^\infty \lambda_{|K_1(\cdot,y)|}(t)\,dt.$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x,y)|\,dx &\le \int_0^\infty \lambda_{|K(\cdot,y)|}(t+A)\,dt\\ &\le \|K(\cdot,y)\|_{WL^q}^q\int_A^\infty t^{-q}\,dt\\ &\le \frac{C^qA^{1-q}}{q-1}.\end{aligned}$$

对于几乎每个 $y \in \mathbb{R}^n$ 成立. 同时

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K_1(x,y)|\, dy \leq \frac{C^q A^{1-q}}{q-1}, \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

于是, 由定理 3.1 得

$$\|T_1(f)\|_p \leq \frac{C^q A^{1-q}}{q-1} \|f\|_p.$$

令 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

如果 $p = 1$ 即 $p' = \infty$, 那么

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|K(x,\cdot)\|_{p'} \leq A. \tag{1}$$

假设 $1 < p < q'$, 那么由不等式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |K_2(x,y)|^{p'}\, dy &= p' \int_0^A t^{p'-1} \lambda_{|K(x,\cdot)|}(t)\, dt \\ &\leq \|K(x,\cdot)\|_{WL^q}^q \; p' \int_0^A t^{p'-1-q}\, dt \\ &\leq \frac{p' C^q}{p'-q} A^{p'-q} \qquad (\text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

注意到 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, 我们推出

$$\|K_2(x,\cdot)\|_{p'} \leq \left(\frac{r}{q} C^q\right)^{\frac{1}{p'}} A^{\frac{q}{r}} \qquad (\text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

显然, (1) 可以并入 (2). 那么, 使用 Hölder 不等式, 我们得到

$$\|T_2(f)\|_\infty \leq \left(\frac{r}{q} C^q\right)^{\frac{1}{p'}} A^{\frac{q}{r}} \|f\|_p.$$

于是, 如取 A 使

$$\left(C^q \frac{r}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} A^{\frac{q}{r}} \|f\|_p = t/2,$$

则 $\lambda_{|T_2(f)|}(t/2)=0$. 因此

$$\begin{aligned}\lambda_{|T(f)|}(t) &\le \lambda_{|T_1(f)|}\Big(\frac{t}{2}\Big) \le \big(2\|T_1(f)\|_p t^{-1}\big)^p \\ &\le \Big(\frac{2C^q}{q-1}A^{1-q}\|f\|_p t^{-1}\Big)^p \\ &\le \Big[\frac{2C^q}{q-1}\Big(\frac{r}{q}\Big)^{\frac{r}{p'q'}}\Big(\frac{1}{2C^{\frac{q}{p'}}}\frac{t}{\|f\|_p}\Big)^{\frac{r(1-q)}{q}}\frac{\|f\|_p}{t}\Big]^p \\ &= \Big(\frac{1}{q-1}\Big)^p\Big(\frac{r}{q}\Big)^{\frac{rp}{p'q'}}\big(2C\|f\|_p t^{-1}\big)^r.\end{aligned}$$

上式表示 T 为弱 (p,r) 型的 $(1\le p<q')$. □

习　题

1. 设 $1\le r,p,q\le\infty$, $a(x)\in L^r(\mathbb{R}^n)$. 定义算子

$$T:\ f\to Tf=af.$$

证明当

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$$

时, T 为 (p,q) 型的.

2. 设 $0<\alpha<n$. 定义算子 T_α 为

$$T_\alpha(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{-\alpha}f(y)\,dy.$$

证明 T_α 为弱 $(1,\frac{n}{\alpha})$ 型的.

3. 设算子 T 为弱 (p,q) 型的, $1\le p,q<\infty$. 证明：若 $m(X)<\infty$, $0<r<q$, 则

$$\Big(\int_X|T(f)(x)|^r\,dx\Big)^{\frac{1}{r}} \le C\Big(\frac{q}{q-r}\Big)^{\frac{1}{r}}m(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\|f\|_p,$$

其中 $C=\|T\|_{-w(p,q)}$.

(提示：取 $\lambda = C\frac{\|f\|_p}{m(X)^{\frac{1}{q}}}$. 依 λ 水平把 f 分为两部分.)

4. 试用 Hölder 不等式证明定理 3.1.

第三章　极大函数

§1. Lebesgue 微分定理

对于一元可积函数 f, 我们把形如 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 的函数 F(其中 a 是任取的常数), 叫作 f 的原函数，或不定积分. 我们现在把这个概念推广到多元的情形.

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，且积分值 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ 存在. 对于任意的 Lebesgue 可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 定义 $F(E)=\int_E f(x)\,dx$. 集函数 F 叫做 f 的不定积分. 与原来一元情形不同，这里，不定积分 (当 $n>1$ 时) 不可能定义成一个点函数，而是一个集函数，或确切地说，它是一个符号测度，它关于 Lebesgue 测度绝对连续，且 Radon-Nikodym 导数就是原来的函数 f.

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $r>0$. 记

$$Q(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:\quad x_j-\frac{r}{2}<y_j<x_j+\frac{r}{2},j=1,\cdots,n\}.$$

也就是说，$Q(x,r)$ 表示以 x 为中心，以 r 为边长的，各边分别与各坐标轴平行的，开的方体. 我们约定，当提到方体时，总是指这种形状的方体. 当我们不必注意这样的方体的边长时，我们略去 r 而简单地把 $Q(x,r)$ 写成 $Q(x)$; 而当我们不必注意这样的方体的中心时，我们略去 x 而简单地把 $Q(x,r)$ 写成 $Q(r)$. 当然，联系上下文，这样的简写决不会引起混淆.

定义1.1 给定 $x\in\mathbb{R}^n$, 设 Q_x 为中心在 x 处的 n 维立方体 (其边平行于坐标轴). 如果

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}F(Q(x,r))=f(x),$$

则称 f 的不定积分在 x 处可微，且其导数为 $f(x)$.

定理1.1 设 $f\in \mathrm{C_C}(\mathbb{R}^n)$, 则 f 的不定积分在 $\mathbb{R}^n$ 上处处可微.

证 任取 $x\in\mathbb{R}^n$, $r>0$. 由不等式

$$\begin{aligned}\left|r^{-n}F\big(Q(x,r)\big)-f(x)\right| &\le r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(t)-f(x)|\,dt\\ &\le \sup_{y\in Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\end{aligned}$$

以及 f 的一致连续性便得

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}F\big(Q(x,r)\big)=f(x).\square$$

下面的定理叫做 Lebesgue 微分定理.

定理1.2 若 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 则 f 的不定积分在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处可微，且

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}F\big(Q(x,r)\big)=f(x),\qquad \text{a.e.}$$

为证此定理，我们援引第一篇第二章定理 4.2, 而得到下述引理.

引理1.3 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, 则对任一 $\varepsilon>0$, 必存在一 $C(x)\in \mathrm{C_C}(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-C(x)|^p\,dx<\varepsilon.$$

显然，为证定理 1.2, 只须证明

$$\limsup_{r\to 0}\left|r^{-n}F\big(Q(x,r)\big)-f(x)\right|=0\quad \text{a.e.}$$

由引理 1.3, 存在 $C_k\in \mathrm{C_C}(\mathbb{R}^n)$, 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)-C_k(t)|\,dt\longrightarrow 0,\quad k\to\infty.$$

于是，由定理 1.1 可得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\left|r^{-n}F\big(Q(x,r)\big)-f(x)\right|\\
&\le \limsup_{r\to 0}\left|r^{-n}F\big(Q(x,r)\big)-r^{-n}\int_{Q(x,r)}C_k(t)\,dt\right|\\
&\quad+\limsup_{r\to 0}\left|r^{-n}\int_{Q(x,r)}C_k(y)\,dy-C_k(x)\right|+|C_k(x)-f(x)|\\
&\le \sup_{r>0}r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)-C_k(y)|\,dy+|C_k(x)-f(x)|.
\end{aligned}$$

由上式最右端看出，我们需要处理一类形如

$$x\longrightarrow \sup_{r>0}r^{-n}\int_{Q(x,r)}|g(y)|\,dy$$

的函数，叫做 g 的 Hardy-Littlewood 极大函数或简称为 HL 极大函数. 有关 HL 极大函数的性质将在下面 §3 中建立，而定理 1.2 的证明自然也要推延到 §3 中来完成.

§2. 复盖引理

引理2.1 (Vitali 复盖引理) 设 $mE<\infty$, 则从 E 的立方体复盖 $\mathcal{K}$ 中可选出有限个互不相交的立方体 $\{Q_j\}_{j=1}^N$, 使得

$$\sum_{j=1}^N|Q_j|\ge 5^{-n-1}m(E).$$

证 记 $Q=Q(t)$ 表示方体 Q 的边长为 t. 记 $\mathcal{K}_1=\mathcal{K}$. 定义

$$t_1^*=\sup\{t:\ Q=Q(t)\in\mathcal{K}_1\}.$$

不妨设 $t_1^*<\infty$ (否则，引理结论成立). 于是，可取一 $Q_1=Q_1(t_1)\in\mathcal{K}_1$, 使得 $t_1>\frac{t_1^*}{2}$. 置

$$K_1=K_2\cup K_2',$$

其中

$$K_2 = \{Q \in K_1:\ Q \cap Q_1 = \emptyset\},$$
$$K_2' = \{Q \in K_1:\ Q \cap Q_1 \neq \emptyset\}.$$

记 Q_1^5 为 Q_1 的 5 倍同心扩张. 由 $t_1^* < 2t_1$ 可知: 对任一 $Q \in K_2'$, 必有 $Q \subset Q_1^5$. 又定义

$$t_2^* = \sup\{t:\ Q = Q(t) \in K_2\}.$$

同样, 可取一 $Q_2 = Q_2(t_2) \in K_2$, 使得 $t_2 > \frac{t_2^*}{2}$. 显然 $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. 置 $K_2 = K_3 \cup K_3'$, 其中

$$K_3 = \{Q \in K_2:\ Q \cap Q_2 = \emptyset\},$$
$$K_3' = \{Q \in K_2:\ Q \cap Q_2 \neq \emptyset\}.$$

同样, 对任一 $Q \in K_3'$, 必有 $Q \subset Q_2^5$. 重复以上方法, 得到一列立方体 $\{Q_i\}$. 显然, 诸 Q_i 互不相交, 且每个 $Q \in K_{i+1}'$ 都满足 $Q \subset Q_i^5$. 以下, 将可能发生两种情形:

(i) 到某一步 $K_{N+1} = \emptyset$. 此时, 所得的立方体序列为有限的, 且 $K = K_2' \cup K_3' \cup \cdots \cup K_{N+1}'$. 于是

$$\begin{aligned} m(E) &\leq m\left(\bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{Q \in K_{i+1}'} Q\right) \\ &\leq m\left(\bigcup_{i=1}^{N} Q_i^5\right) = 5^n \sum_{i=1}^{N} m(Q_i). \end{aligned}$$

(ii) 否则, 所得立方体序列 $\{Q_i\}$ 为无限的. 不妨设 $\lim\limits_{j\to\infty} t_j^* = 0$ (否则, 由 $t_j^* \searrow \delta$ 可得, $t_j \geq \frac{1}{2}t_j^* \geq \frac{1}{2}\delta > 0$, 以及 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(Q_j(t_j)) = \infty$, 引理结论成立). 此时, 对任一 $Q = Q(t) \in K = K_1$, 必有 $Q \subset \bigcup\limits_j Q_j^5$.

事实上，倘若 $Q \not\subset \bigcup_j Q_j^5$, 则对于每个 $j \in \mathbb{N}$, $Q \notin K'_{j+1}$. 从而，对于每个 $j \in \mathbb{N}$,$Q \in K_{j+1}$. 于是由 $t \le t_{j+1}^*$ 及 $\lim t_j^* = 0$ 便导致一个错误的结论 $t = 0$. 因此

$$E \subset \bigcup_{Q \in K} Q \subset \bigcup_j Q_j^5.$$

由此得到

$$m(E) \le m\Big(\bigcup_j Q_j^5\Big) = 5^n \sum_{j=1}^{\infty} m(Q_j).\square$$

注 如将引理条件中的立方体换成球，则结论同样成立.

§3. 极大函数 HL

定义3.1 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$(此记号代表在 $\mathbb{R}^n$ 的每个紧子集上都可积 — 局部可积的函数的全体). 规定

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{HL}(f)(x) = \sup_{r>0} r^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

称 $\mathrm{HL}(f)$ 为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数， HL 为 Hardy-Littlewood 极大算子.

定理3.1 算子 $\mathrm{HL}: f \longrightarrow \mathrm{HL}(f)$ 为弱 $(1,1)$ 型的，且

$$\forall \alpha > 0, \quad m\big(\{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{HL}(f)(x) > \alpha\}\big) \le 5^{n+1}\alpha^{-1}\|f\|_1.$$

证 设 $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$. 定义

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{HL}(f)(x) > \alpha\}, \qquad E_k = \{x \in E : \ \ |x| < k\}.$$

其中 $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ 是 x 的 Euclid 范数. 显然,

$$mE_k < \infty, \qquad \lim_{k \to \infty} mE_k = mE.$$

对于每个 $x\in E_k$, 必存在一个方体 $Q(x)$ 使得

$$\frac{1}{mQ(x)}\int_{Q(x)}|f(y)|\,dy>\alpha.$$

显然, $\{Q(x):\quad x\in E_k\}$ 构成 E_k 的一个复盖. 由引理 2.1, 从这族方体中可取出有限个 $Q_j:\quad j=1,\cdots,N$, 它们互不相交的, 且使得

$$mE_k\le 5^{n+1}\sum_{j=1}^{N}|Q_j|.$$

从而

$$mE_k\le 5^{n+1}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\alpha}\int_{Q_j}|f(y)|\,dy\le 5^{n+1}\alpha^{-1}\|f\|_1.$$

令 $k\to\infty$, 就得到所要证的不等式. □

显然, 次线性算子 HL: $f\longrightarrow \mathrm{HL}(f)$, 为 (∞,∞) 型的, 结合定理 3.1 并使用算子插值定理 2.2 便推得

推论3.2 设 $1<p<\infty$, 则算子 HL 为 (p,p) 型的, 且

$$\|\mathrm{HL}(f)\|_p\le C\frac{p}{p-1}\|f\|_p,$$

其中 C 同 p,f 无关.

现在, 让我们回到 Lebesgue 微分定理的证明上. 本章 §1 的末尾已经指出

$$\limsup_{r\to 0}\left|r^{-n}F\big(Q(x,r)\big)-f(x)\right|\\ \le \mathrm{HL}(f-C_k)(x)+|C_k(x)-f(x)|,$$

其中 $C_k\in \mathrm{C_C}(\mathbb{R}^n)$, 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)-C_k(t)|\,dt\longrightarrow 0,\quad k\to\infty.$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 记

$$E_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left|r^{-n}F\big(Q(x,r)\big) - f(x)\right| > \varepsilon\right\}.$$

显然,

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \subset &\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathrm{HL}(f - C_k) > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \\ &\{x \in \mathbb{R}^n : \quad |f(x) - C_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}. \end{aligned}$$

于是, 由定理 3.1, 有

$$\begin{aligned} mE_\varepsilon \le 5^{n+1}\frac{2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} &|f(y) - C_k(y)|\, dy + \\ \frac{2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} &|f(y) - C_k(y)|\, dy. \end{aligned}$$

上式蕴含着 $mE_\varepsilon = 0$. 定理证毕. □

注 显然, Lebesgue 微分定理中的条件 $f \in L(\mathbb{R}^n)$ 可以放宽为 $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

作为极大函数的一个简单应用, 我们来证明一个比 Lebesgue 微分定理更强的结论.

定义3.2 设 $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 若 f 满足

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)|^p\, dy = 0,$$

则称 x 为 f 的 p 次 Lebesgue 点, 简记为 L^p 点, 一次 Lebesgue 点简称为 Lebesgue 点, 或 L 点.

显然, Lebesgue 点的概念是刻画局部性质的, 可以只对局部可积 (或局部 p 次幂可积) 的函数来定义. 而且, L^p 点 $(1 < p < \infty)$ 必然是 L 点.

定理3.3 若 $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则关系式

$$\lim_{r\to 0} r^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy = 0,$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上 a.e. 成立，意即 $\mathbb{R}^n$ 上几乎所有的点都是 f 的 p 次 Lebesgue 点.

证 设 $\{r_k:\ k \in \mathbb{N}\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的有理数全体. 记

$$Z_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r\to 0} r^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y) - r_k|^p \, dy \ne |f(x) - r_k|^p \right\}.$$

因 $|f(y) - r_k|^p \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 故由上面的注可知 $mZ_k = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. 又记

$$Z_0 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| = \infty\}, \qquad Z = Z_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k.$$

显然， $mZ = 0$ 于是，只须证明：当 $x \notin Z$ 时，有

$$\limsup_{r\to 0} r^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy = 0.$$

事实上，对于任意的有理数 r_k 和正数 r

$$\left(r^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(r^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y) - r_k|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + |f(x) - r_k|.$$

故当 $x \notin Z$ 时，

$$\limsup_{r\to 0} \left(r^{-n} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f(x)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \le 2|f(x) - r_k|.$$

上式右端可任意小，故证实了前面的断言. □

顺便指出，算子 HL 不是 (1,1) 型的. 下面的例子表明，$f \in L(\mathbb{R}^n)$ 不保证 $\mathrm{HL}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

例 设 $Q = Q(O,1)$, O 为原点. 我们有 $\mathrm{HL}(\chi_Q) \notin L(\mathbb{R}^n)$.

证 事实上，当 $|x| > 2$ 时

$$\begin{aligned}\mathrm{HL}(\chi_Q)(x) &= \sup_{r>0} r^{-n} \int_{Q(x,r)} \chi_Q(y)\, dy \\ &= \sup_{r>0} r^{-n} m\big(Q \bigcup Q(x,r)\big) \\ &\geq (4|x|)^{-n} m\big(Q \bigcup Q(x, 4|x|)\big) \\ &\geq (4|x|)^{-n}.\end{aligned}$$

这表明 $\mathrm{HL}(\chi_Q) \notin L(\mathbb{R}^n)$. □

作为推论 3.2 的一个应用，我们来证明，如果限制在 $\mathbb{R}^n$ 的有限测度子集 X 上，$f \in L\log^+ L(X)$ 保证 $\mathrm{HL}(f) \in L(X)$. 确切地说，我们有如下定理.

定理3.4 设 $1 < mX < \infty$. 若

$$\int_X |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)\, dx < \infty$$

则 $\mathrm{HL}(f) \in L(X)$, 且

$$\int_X \mathrm{HL}(f)(x)\, dx \leq CmX \left\{1 + \int_X |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)\, dx\right\}.$$

式中 $\log^+ |u| = \max\{0, \log|u|\}$, C 是只与 n 有关的常数.

证 记

$$\begin{aligned}E_0 &= \{x \in X:\ 0 \leq |f(x)| < 1\}, \\ E_k &= \{x \in X:\ 2^{k-1} \leq |f(x)| < 2^k\}\ k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

定义 $f_k = |f|\chi_{E_k}$. 显然, $|f| = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ a.e., 且

$$\begin{aligned}\mathrm{HL}(f)(x) &\le \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{HL}(f_k)(x) \\ &\le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{HL}(f_k)(x).\end{aligned}$$

取

$$p_k = 1 + \frac{1}{k+1}, \quad p_k' = k+2$$

关于指数对 (p_k, p_k') 使用 Hölder 不等式, 有

$$\int_X \mathrm{HL}(f_k)(x)\,dx \le \|\mathrm{HL}(f_k)\|_{p_k} (mX)^{\frac{1}{p_k'}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_X \mathrm{HL}(f)(x)\,dx &\le mX + \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathrm{HL}(f_k)\|_{p_k} (mX)^{\frac{1}{p_k'}} \\ &\le mX + C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{p_k - 1} \|f_k\|_{p_k} (mX)^{\frac{1}{p_k'}} \\ &\le mX + 2C\sum_{k=1}^{\infty} (k+2)2^k (mE_k)^{\frac{1}{p_k}} (mX)^{\frac{1}{p_k'}} \\ &\le CmX\left\{1 + 2C\left(\sum_{mE_k \le 3^{-k}} + \sum_{mE_k > 3^{-k}}\right)\right\} \\ &\le CmX\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} k2^k mE_k\right\}.\end{aligned}$$

另一方面, 显然有

$$\begin{aligned}&\int_X |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)\,dx \\ &\ge \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)\,dx.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|(1+\log^+|f(x)|)\,dx.$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}[1+(k-1)\log 2]mE_k,$$

联立以上各式，便得到定理的结论. □

习 题

1. 设 $f\in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, Q 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体. 记

$$f^*(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{m(Q)}\int_Q|f(y)|\,dy.$$

证明存在一正的常数 C(仅同 n 有关), 使得

$$Cf^*(x)\leq \text{HL}(f)(x)\leq f^*(x).$$

2. 证明：若 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|f\|_1>0$, 则 $\text{HL}(f)\notin L(\mathbb{R}^n)$.
3. 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上对每个变元都以 1 为周期的函数,

$$Q=Q(O,1)=\{x=(x_1,\cdots,x_n):\ |x_i|<\frac{1}{2},\ 1\leq i\leq n\}.$$

证明：若 $f\in L(Q)$, 且 $f_Q=f\chi_Q$, 则当 $2x\in Q$ 时

$$\text{HL}(f)(x)\leq C\text{HL}(f_Q)(x),$$

其中 C 同 f, x 无关.

4. 证明：若 $f\in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $|f(x)|\leq C|x|^{-n}$ (当 $|x|>2$), 则

$$\text{HL}(f)(x)\leq C|x|^{-n}\log|x|\ \ (\text{当 }\|x\|>2).$$

5. 设 Q 是开的方体. 证明

$$\forall x \in Q, \quad \mathrm{HL}(\chi_{Q})(x) = 1.$$

6. 设 x_0 为立方体 Q 的中心， $x \in Q$. 证明存在一常数 C(同 f, x 无关，也同 Q 无关), 使得

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q} \frac{|x_0 - x|}{|x_0 - y|^{n+1}} f(y)\, dy \right| \leq C\mathrm{HL}(f)(x).$$

第四章　卷积

§1. 卷积

卷积的概念，无论在古典分析或近代分析中都有着基本的重要性.

定义1.1 设 f 和 g 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，则 f 和 g 的卷积被定义为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt.$$

如将卷积 $*$ 看作一个代数运算，那末它满足交换律和结合律：

$$(f*g)(x)=(g*f)(x),$$
$$(f*g)*h(x)=f*(g*h)(x).$$

我们来讨论三个问题：卷积的可积性，卷积的连续性，卷积的光滑性.

关于卷积的可积性，我们有下述定理.

定理1.1 设

$$1\le p,q,r\le\infty,\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1.$$

若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$g\in L^q(\mathbb{R}^n)$，则 $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|f*g\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q.$$

证 先考虑 $q=1$ 的情形．此时 $p=r$．我们有

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt.$$

根据 Minkowski 不等式 (见第一章定理 4.2), 我们有

$$\|f*g\|_p \le \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_p |g(t)| dt = \|f\|_p \|g\|_1.$$

固定 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 考虑线性算子 $T:\ g \to f*g$. 上述结果表明 T 为 $(1,p)$ 型的，且

$$\|Tg\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1;$$

由 Hölder 不等式易证 T 为 (p',∞) 型的，且

$$\|Tg\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

在 Riesz-Thörin 定理中取 $(p_0,q_0)=(1,p)$, $(p_1,q_1)=(p',\infty)$, 在 $t=\frac{p}{q'}$ 处插值，就得到 $p_t=q$, $q_t=r$, 以及

$$\|f*g\|_r = \|Tg\|_{q_t} \le (\|f\|_p^{1-t}\|f\|_p^t)\|g\|_{p_t} = \|f\|_p\|g\|_q.\square$$

在讨论连续性之前，我们先引入连续模的概念. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一致连续函数. 定义

$$\omega(f;\delta)_c = \sup\{|f(x)-f(y)|:\quad x,y\in\mathbb{R}^n, |x-y|\le\delta\},\quad \delta>0.$$

称 $\omega(f;\delta)_c$ 为 f 的连续模. 易见

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)_c = 0$$

正是 f 的一致连续性的刻画. 对于连续函数 f, 记 $\|f\|_c = \|f\|_\infty$.

关于卷积的连续性，我们有下述定理.

定理1.2 若 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 且 K 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界且一致连续，则 $f*K$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上也有界且一致连续.

证 $f*K$ 的有界性是显然的，其一致连续性由

$$\begin{aligned}|(f*K)(x+h)-(f*K)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)[K(t+h)-K(t)]\,dt\right| \\ &\le \omega(K;|h|)_c\|f\|_1\end{aligned}$$

得出. □

卷积变换的一个非常有意义的性质是：可积函数同光滑函数卷积后，将成为一个光滑函数. 这个事实将使卷积成为分析中的一个重要角色. 设 $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. 记

$$\mathrm{C}^m(\mathbb{R}^n) = \{f: \ D^\alpha f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n), \ \ |\alpha| \le m\},$$
$$\mathrm{C}_\mathrm{c}^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathrm{C}^m(\mathbb{R}^n): \ f\text{具有紧支集}\},$$

其中

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

定理1.3 设 $K \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^m(\mathbb{R}^n)$. 若 $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 $f*K \in \mathrm{C}^m(\mathbb{R}^n)$, 且

$$D^\alpha(f * K)(x) = (f * D^\alpha K)(x), \ \ |\alpha| \le m.$$

证 记

$$r = \sup\{|y|: \quad y \in \operatorname{supp} K\}.$$

任取 $x \in \mathbb{R}^n$. 定义

$$B(x) = \{y \in \mathbb{R}^n: \quad |y| \le r + |x| + 1\}.$$

易见，当 $t \in (B(x))^c$ 且 $h \in \mathbb{R}^n, |h| < 1$ 时,

$$K(x + h - t) = K(x - t) = 0.$$

先设 $m = 0$. 由关系式

$$\begin{aligned}
&|(f * K)(x + h) - (f * K)(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)[K(x + h - t) - K(x - t)]\, dt \right| \\
&\le \|f\|_{L\left(B(x)\right)} \omega(K; |h|)_c \quad (h \in \mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

便得 $f*K\in C(\mathbb{R}^n)$.

设 $m=1$. 记 $h=(0,\cdots,0,h_i,0,\cdots,0)$ (其中 h_i 为第 i 个分量). 显然, 当 $|h|<1$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{(f*K)(x+h)-(f*K)(x)}{h_i}\\&=\int_{B(x)} f(t)\Big[\frac{K(x-t+h)-K(x-t)}{h_i}\Big]\,dt\\&=\int_{B(x)} f(t)\frac{\partial K}{\partial x_i}(x-t+h')\,dt,\end{aligned}$$

其中 $h'=(0,\cdots,0,h_i',0,\cdots,0)$ (h_i' 为第 i 个分量, $0<|h_i'|<|h_i|$). 同 $m=0$ 的情形一样, 可得

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{(f*K)(x+h)-(f*K)(x)}{h_i}-f*\frac{\partial K}{\partial x_i}\Big|\\&\le \|f\|_{L\left(B(x)\right)}\,\omega\Big(\frac{\partial K}{\partial x_i};|h|\Big)_c.\end{aligned}$$

于是, 令 $h_i\to 0$, 得到

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*K)(x)=\Big(f*\frac{\partial K}{\partial x_i}\Big)(x).$$

对于 $m=2,3,\cdots$, 证明相同. □

下面的推论是定理 1.3 的直接结果.

推论1.4 (i) 若 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 且 $K\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则 $f*K\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) 若 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, f 具有紧支集, 且 $K\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则 $f*K\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

现在, 我们利用推论 1.4(ii) 给出 $\mathbb{R}^n$ 上 Урысон 引理 (见第一篇第二章定理 2.4) 中函数 f 的一种具体构造方法. 当然, 这是以 $\mathbb{R}^n$ 的 Euclid 拓扑为基础的.

定理1.5 ($\mathbb{R}^n$ 上 Урысон 引理) 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，U 为 $\mathbb{R}^n$ 的开集，且 $K \subset U$, 则存在一 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$, 使得

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \in U^c. \end{cases}$$

证 记 $\delta = \operatorname{dist}(K, U^c)$. 因 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，故 $\delta > 0$. 定义

$$V = \{x : \operatorname{dist}(x, K) < \frac{\delta}{3}\}.$$

现在取一定义于 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 上的非负函数 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$, 满足

$$\operatorname{supp}\psi \subset [0, \frac{\delta}{3}), \qquad \int_0^\infty t^{n-1}\psi(t)\,dt\,\sigma(\Sigma_{n-1}) = 1.$$

定义

$$\varphi(x) = \psi(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

那么，我们容易看出，非负函数 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{x : \ |x| < \frac{\delta}{3}\}, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1.$$

现置 $f = \chi_V * \varphi$. 由推论 1.4 (ii) 可知 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 显然，$0 \le f \le 1$. 当 $x \in K$, $t \in \operatorname{supp}\varphi$ 时，有 $x - t \in V$. 于是

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_V(x-t)\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\,dt = 1, \quad 当 x \in K.$$

最后，由 $\operatorname{supp}(\chi_V * \varphi) \subset \operatorname{supp}\chi_V + \operatorname{supp}\varphi$, 易知 $\operatorname{supp} f \subset U$. 于是，定理证毕. □

§2. 恒等逼近

我们仍用 $\mathcal{F}$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数的全体.

定义2.1 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数， $\varepsilon > 0$, 以及 $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(x/\varepsilon)$. 设 X 是 $\mathcal{F}$ 的一个子集. 若对 X 中的任一 f, 在一定的收敛意义下，成立着

$$f * K_\varepsilon \longrightarrow f, \quad 当\varepsilon \to 0,$$

则称 K 为 X 上的恒等逼近核，算子 $K_\varepsilon: f \longrightarrow f * K_\varepsilon$ 为 X 上的恒等逼近算子 (当 $\varepsilon \to 0$).

我们首先研究在范数收敛意义下，K_ε 成为恒等逼近算子的条件. 下边两个定理告诉我们，原则上只要 K 可积，它就是 L^p $(1 \le p < \infty)$ 尺度下和一致尺度下的恒等逼近核.

定理2.1 设 $K \in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = 1$, 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * K_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

证 由 Minkowski 不等式 (见第一章定理 4.2) 得

$$\|f * K_\varepsilon - f\|_p \le \left| \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - \varepsilon t) - f(\cdot)\|_p |K(t)|\,dt \right|.$$

由于

$$\|f(\cdot - \varepsilon t) - f(\cdot)\|_p \le 2\|f\|_p$$

以及

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f(\cdot - \varepsilon t) - f(\cdot)\|_p = 0,$$

此事易由第三章定理 1.3 推出，使用控制收敛定理，就得到欲证之结论. □

定理2.2 设 $K \in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = 1$. 若 f 有界且一致连续，则关系式

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f * K_\varepsilon) - f\|_c = 0.$$

也就是说，$f*K$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛到 f (当 $\varepsilon\to 0$).

证 我们有

$$|(f*K_\varepsilon)(x)-f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}[f(x-\varepsilon t)-f(x)]K(t)\,dt\right|$$
$$\le \int_{\mathbb{R}}^{n}\omega(f;\varepsilon|t|)_c|K(t)|\,dt.$$

由于

$$\omega(f;\varepsilon|t|)_c \le 2\|f\|_c$$

使用 Lebesgue 控制收敛定理，就得到欲证之结论. □

作为定理 2.1 的推论，我们在 $\mathbb{R}^n$ 中再次得到第一篇第二章定理 4.2, 并加强第三章引理 1.3 的结论如下.

推论2.3 设 $1\le p<\infty$, 则 $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

证 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 作 $f=g+h$, 其中 g 具有紧支集，且 $\|h\|_p<\eta$. 今取 $K\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\,dx=1$. 由本章 §1 推论 1.4 可知 $g*K_\varepsilon\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 又由定理 2.1 可知 $\|g*K_\varepsilon-g\|_p\longrightarrow 0$(当 $\varepsilon\to 0$). 于是，稠密性的结论可由不等式

$$\|g*K_\varepsilon-f\|_p\le\|g*K_\varepsilon-g\|_p+\|h\|_p\le\|g*K_\varepsilon-g\|_p+\eta$$

得出. □

下面，我们讨论点态的，几乎处处意义下的恒等逼近问题. 在我们的讨论中，将用到 Lebesgue 点的性质.

引理 2.4 设 $1\le p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 如果 x 是 f 的 L^p 点，则 x 也是 f 的 L 点，且

$$\mathrm{HL}(f)(x)<\infty.$$

证 设 $0 < r < \infty$. 由 Hölder 不等式得

$$r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dy \le \left(r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这表明 x 是 f 的 L 点. 而且, 存在正数 δ 使得当 $0 < r \le \delta$ 时,

$$r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dy \le \left(r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < 1.$$

另一方面, 当 $r > \delta$ 时,

$$\begin{aligned} r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dy &\le \left(\delta^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} + |f(x)| \\ &\le \delta^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p + |f(x)| < \infty. \end{aligned}$$

可见

$$\mathrm{HL}(f)(x) \le |f(x)| + \sup_{r>0} r^{-n}\int_{Q(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dy < \infty.\square$$

定理2.5 设 $K \in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = 1$. 定义

$$\varphi(r) = \sup\{|K(x)| : \quad x \in \mathbb{R}^n, |x| \ge r\}, \qquad r > 0.$$

如果 $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)\,dx < \infty$, 则对于任意的 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 在 f 的 L^p 点 x 处,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |(f * K_\varepsilon)(x)| = f(x).$$

证 定义

$$E = \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty): \quad \varphi(|y|) > t\},$$
$$E(t) = \{y \in \mathbb{R}^n: \quad \varphi(|y|) > t\}, \qquad t > 0.$$

我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|y|)\,dy = \int_0^\infty mE(t)\,dt < \infty.$$

可见，$E(t)$ 是一个以原点为中心，半径有限的球. 设它的半径是 $r(t)$, 并记 $E(t) = B\big(r(t)\big)$. 我们有

$$\begin{aligned}
|f{*}K_\varepsilon(x) - f(x)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-\varepsilon y) - f(x)\big)K(y)\,dy\Big| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big|\varphi(|y|)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big| \int_0^\infty \chi_E(y,t)\,dt\,dy \\
&= \int_0^\infty \frac{mE(t)}{mB\big(r(t)\big)} \int_{B\left((r(t)\right)} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big|\,dy\,dt.
\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
g(x;\varepsilon,t) &= \frac{1}{mB\big(r(t)\big)} \int_{B\left(r(t)\right)} \big|f(x-\varepsilon y) - f(x)\big|\,dy \\
&= \frac{1}{mB\big(\varepsilon r(t)\big)} \int_{B\left(\varepsilon r(t)\right)} \big|f(x-y) - f(x)\big|\,dy.
\end{aligned}$$

据引理 2.4,

$$g(x;\varepsilon,t) \le C_n\big(\mathrm{HL}(f)(x) + |f(x)|\big) < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon > 0,\ t > 0;$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(x;\varepsilon,t) = 0 \qquad \forall\, t > 0.$$

那么，使用控制收敛定理，就得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |f * K_\varepsilon(x) - f(x)| = \int_0^\infty \lim_{\varepsilon\to 0} g(x;\varepsilon,t) mE(t)\,dt = 0.\square$$

§3. Poisson 积分， HL 的进一步应用

Poisson 积分在调和分析中起着重要的作用. 它与调和函数的理论密切相关.

定义3.1(Poisson 核) 记

$$C_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big),$$
$$P(x) = \frac{C_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}},\ (x \in \mathbb{R}^n).$$

称 P 为 n 维 Poisson 核. 对于 $y>0$, 令 $P_y(x) = y^{-n}P(y^{-1}x)$. 函数 f 与 P_y 的卷积

$$(f * P_y)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)P_y(t)\,dt,\quad y>0,$$

叫做 f 的 Poisson 积分.

容易验证， $P \in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\,dx = 1$. 因此，由定理 2.1 推得

推论3.1 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 则

$$\lim_{y\to 0}\|f * P_y - f\|_p = 0.$$

由定理 2.2 直接推得

推论3.2 若 $f \in \mathrm{C_C}(\mathbb{R}^n)$, 则关系式

$$\lim_{y\to 0}(f * P_y)(x) = f(x)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上一致成立.

易见，核 P 还满足定理 2.5 的条件. 故由该定理得到关于 Poisson 积分几乎处处收敛的结论. 确言之，我们有下述推论.

推论3.3 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, 则关系式

$$\lim_{y \to 0}(f * P_y)(x) = f(x)$$

在 f 的每个 L^p 点 x 处都成立. 从而，上式 a.e. 成立.

我们知道，在解析函数 (或调和函数) 的边值理论中，**非切向** 极限，是一种要的极限方式. 例如，单位圆周上的可积函数的 Poisson 积分在圆内解析 (调和), 且几乎处处有非切向边界值. 但若对极限方式不加限制，就可能处处没有边界值. 在上半空间中，情况是类似的. 下面，我们使用极大函数的方法来建立关于上半空间中 Poisson 积分的 **非切向** 边值的定理.

记 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 为 $n+1$ 维欧氏空间的上半空间，即

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x, y): \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0\}.$$

上半空间 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中的区域

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : \ |x - x_0| < \alpha y\}$$

称为以 x_0 为顶点的角形区域，其中 $\alpha > 0$.

定义3.1 若对每一 α, 有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}}(f * P_y)(x) = f(x_0),$$

则称 Poisson 积分 $(f * P_y)(x)$ 非切向收敛于 $f(x_0)$.

定理3.4 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, 则 $\forall\, \alpha > 0$

$$\sup_{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)} |(f * P_y)(x)| \le C\mathrm{HL}(f)(x_0),$$

其中 C 同 f 及 x_0 无关 (但同 n 和 α 有关).

证 设 $(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)$. 则

$$
\begin{aligned}
|(f*P_y)(x)| &= C_n\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}f(t)\,dt\right|\\
&\le \frac{C_n}{y^n}\int_{|t-x_0|\le 2\alpha y}|f(t)|\,dt+\\
&\quad C_n\int_{|t-x_0|>2\alpha y}\frac{y|f(t)|}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt\\
&\le C\mathrm{HL}(f)(x_0)+\\
&\quad C_n\int_{|t-x_0|>2\alpha y}\frac{y|f(t)|}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt.
\end{aligned}
$$

但

$$
\begin{aligned}
&\int_{|t-x_0|>2\alpha y}\frac{y|f(t)|}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k\alpha y<|t-x_0|\le 2^{k+1}\alpha y}\frac{y|f(t)|}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}\,dt\\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}\alpha y)^{-n-1}\int_{|t-x_0|\le 2^{k+1}\alpha y}y|f(t)|\,dt\\
&\le 4^{n+1}\alpha^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}(2^{k+1}\alpha y)^{-n}\int_{|t-x_0|\le 2^{k+1}\alpha y}|f(t)|\,dt\\
&\le C\mathrm{HL}(f)(x_0).
\end{aligned}
$$

于是，定理证毕. □

定理3.5 若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, 则对 a.e. $x_0\in\mathbb{R}^n$, 有

$$
\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}}(f*P_y)(x)=f(x_0).
$$

对于一切 $\alpha>0$ 成立. 即 $f*P_y$ 几乎处处非切向收敛到 f.

证 首先证明：若 $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则定理的结论成立. 事实上, 当 $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当

$$u \in B(x_0, \delta) = \{\tau : |x_0 - \tau| < \delta\}$$

时,

$$|f(u) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

我们有

$$\begin{aligned}|(f*P_y)(x) - f(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-t) - f(x_0)] P_y(t)\, dt \right| \\ &\le \int_{|t|<\frac{\delta}{2}} |f(x-t) - f(x_0)| P_y(t)\, dt + \\ &\quad \int_{|t|\ge\frac{\delta}{2}} |f(x-t) - f(x_0)| P_y(t)\, dt.\end{aligned}$$

当 $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ 且 $|t| < \frac{\delta}{2}$ 时, 有 $x-t \in B(x_0, \delta)$. 因此当 $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ 时,

$$\int_{|t|<\delta/2} |f(x-t) - f(x_0)| P_y(t)\, dt < \varepsilon.$$

又由 $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 得

$$\begin{aligned}&\int_{|t|\ge\frac{\delta}{2}} |f(x-t) - f(x_0)| P_y(t)\, dt \\ &\qquad \le 2\|f\|_c \int_{|t|\ge\frac{\delta}{2y}} P(\tau)\, d\tau \longrightarrow 0, \text{ 当 } y \to 0.\end{aligned}$$

由此推得：对任一 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 及任一 $f \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\limsup_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ (x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}} |(f * P_y)(x) - f(x_0)| = 0.$$

现在设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. 由本章推论 2.2, 存在 $g_k \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_p = 0.$$

于是由不等式

$$|(f*P_y)(x)-f(x_0)|\le|(f-g_k)*P_y(x)|+$$
$$|(g_k*P_y)(x)-g_k(x_0)|+|g_k(x_0)-f(x_0)|$$

以及定理 3.1 得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}}|(f*P_y)(x)-f(x_0)|\\ \le&\sup_{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}|(f-g_k)*P_y(x)|+|g_k(x_0)-f(x_0)|\\ \le&\, C\mathrm{HL}(f-g_k)(x_0)+|g_k(x_0)-f(x_0)|\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&m\big(\{x_0\in\mathbb{R}^n:\ \limsup|(f*P_y)(x)-f(x_0)|>\lambda\}\big)\\ &\le m\big(\{x_0\in\mathbb{R}^n:\ C\mathrm{HL}(f-g_k)(x_0)>\frac{\lambda}{2}\}\big)+\\ &\quad m\big(\{x_0\in\mathbb{R}^n:\ |g_k(x_0)-f(x_0)|>\frac{\lambda}{2}\}\big)\\ &\le m\big(\{x_0\in\mathbb{R}^n:\ \mathrm{HL}(f-g_k)(x_0)>\frac{\lambda}{2C}\}\big)+\Big(\frac{2}{\lambda}\Big)^p\|f-g_k\|_p^p.\end{aligned}$$

由算子 HL 的弱 (p,p) 型，便推出

$$\begin{aligned}&m\big(\{x_0\in\mathbb{R}^n:\ \limsup|(f*P_y)(x)-f(x_0)|>\lambda\}\big)\\ &\le C\lambda^{-p}\|f-g_k\|_p^p.\end{aligned}$$

如注意到 $\|f-g_k\|_p\longrightarrow 0,\ k\to\infty$, 便得,

$$mE(\alpha)=0,\qquad \alpha>0.$$

显然，当 $\alpha>\beta>0$ 时， $E(\beta)\subset E(\alpha)$. 所以,

$$m\Big(\bigcup_{\alpha>0}E(\alpha)\Big)=m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}E(k)\Big)=0.$$

于是，定理证毕.

习　题

1. 设 $0<\alpha<\frac{n-1}{2}$, $n\geq 2$. 定义算子 T 为

$$T(f)(x)=\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |x-y|<1\}}|x-y|^{-(\frac{n+1}{2}+\alpha)}f(y)\,dy.$$

证明 T 为 (p,p) 型的， $1<p<\infty$.

2. 设 $1\leq p\leq\infty, f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 证明 $f*g$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数.
3. 构造一 $f\in C_C^\infty(\mathbb{R})$, 使得 f 在原点取得最大值 1.
4. 设 G_1 和 G_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集，且 $\overline{G}_1\subset G_2$. 试具体构造一 $f\in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in G_1,\\ 0, & x\in G_2^c.\end{cases}$$

5. 设 $K\in L(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\,dx=1$. 若 $f\in C_C^m(\mathbb{R}^n)$, 则 $D^\alpha(f*K_\varepsilon)(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 $D^\alpha f(x)$ (当 $\varepsilon\to 0$), 其中 $|\alpha|\leq m$.
6. 设 $T_\varepsilon(\varepsilon>0)$ 为 $L(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{F}$(可测函数类) 的一族线性算子，定义算子 T^*:

$$T^*(f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon(f)(x)|.$$

证明：若 T^* 为弱 $(1,1)$ 型的，且关系式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon(g)(x)=g(x)\ \ \text{a.e.}$$

对任一 $g\in C(\mathbb{R}^n)\cap L(\mathbb{R}^n)$ 成立，则此关系式对任一 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 也成立.

7. 证明：若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx \longrightarrow 0, \quad \text{当} |t| \to 0.$$

第五章　Fourier 变换

§1.　$L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. 记

$$xy=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,\quad |x|=\sqrt{xx}.$$

定义1.1　设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\widehat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i}x\cdot y}\,dy$$

叫做 f 的 Fourier 变换，也可记作 $\widehat{f}=\mathcal{F}(f)$.

定理1.1　设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则有

(1) $\widehat{f}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|\widehat{f}\|_\infty\le\|f\|_1$;

(2) $\widehat{f}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续；

(3) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\widehat{f}(x)=0$.

证　(1) 由定义 1.1 直接看出，由等式

$$\widehat{f}(x+h)-\widehat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i}x\cdot y}(e^{-2\pi \mathrm{i}h\cdot y}-1)\,dy$$

得

$$|\widehat{f}(x+h)-\widehat{f}(x)|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)||2\sin\,\pi yh|\,dy.$$

上式右端的量同 x 无关，且当 $h\to 0$ 时，由控制收敛定理知它为无穷小量，故 (2) 成立．最后，由于形如

$$f(x)=\sum_{k=1}^m c_k\chi_{Q_k}(x)$$

的简单函数在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，其中 Q_k 为立方体，于是，为证 (3)，只须证明 (3) 对任一立方体 Q 的特征函数 χ_Q 成立即可，而后者的证明可通过将 $\widehat{\chi}_Q(x)$ 表达式中的积分化为累次积分计算后便可得到. □

定理1.2 (乘法公式) 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx$$

证 由 Fibini 定理,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot x}\,dy\right\}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot x}\,dx\right\}g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)\,dy.\square\end{aligned}$$

定理1.3 (导数公式) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 以及 $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\frac{\partial \widehat{f}(x)}{\partial x_k} = \mathcal{F}(-2\pi \mathrm{i} y_k f(y))(x)$$

.

证 记

$$\Delta_k = (0, \cdots, 0, \delta, 0, \cdots, 0) \quad (\delta > 0, \delta\text{为第 } k \text{ 个分量.})$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{f}(x+\Delta_k) - \widehat{f}(x)}{\delta} &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{1}{\delta}\left[e^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot(x+\Delta_k)} - e^{-2\pi y\cdot x\mathrm{i}}\right]dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot x}\frac{e^{-2\pi \mathrm{i} y_k\delta} - 1}{\delta}\,dy.\end{aligned}$$

由

$$\left|\frac{1}{\delta}(e^{-2\pi \mathrm{i} y_k\delta} - 1)\right| \le 2\pi|y_k|$$

及 $y_k f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 并使用控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{f}(x)}{\partial x_k} &= \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}[\widehat{f}(x+\Delta_k)-\widehat{f}(x)]\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot x}\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{-2\pi \mathrm{i} y_k \delta}-1}{\delta}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(-2\pi \mathrm{i} y_k f(y))e^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot x}\,dy\\ &= \mathcal{F}(-2\pi \mathrm{i} y_k f(y)).\square\end{aligned}$$

定理1.4 (导数公式) 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial f(y)}{\partial y_k}\Big)(x) = 2\pi \mathrm{i} x_k \widehat{f}(x)$$

证 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Big(\frac{\partial f(y)}{\partial y_k}\Big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f(y)}{\partial y_k}e^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot x}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi \mathrm{i}\sum\limits_{m\neq k} y_m x_m}\\ &\quad\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f(y)}{\partial y_k}e^{-2\pi \mathrm{i} y_k x_k}\,dy_k\Big)\prod_{m\neq k}dy_m.\end{aligned}$$

分部积分计算得到

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f(y)}{\partial y_k}e^{-2\pi \mathrm{i} y_k x_k}\,dy_k = 2\pi \mathrm{i} x_k\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i} y_k x_k}\,dy_k.$$

于是

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial f(y)}{\partial y_k}\Big)(x) = 2\pi \mathrm{i} x_k \widehat{f}(x).\square$$

注 定理 1.3 表示对函数 f 先作 Fourier 变换, 后求导的计算公式. 定理 1.4 表示对函数先求导, 后作 Fourier 变换的计算公式.

定理1.5 (卷积的 Fourier 变换) 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\mathcal{F}(f * g)(x) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

证 由 Fibini 定理,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(u-y)g(y)\,dy \right\} e^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot u}\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(u-y) e^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot u}\,du \right\} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(v) e^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot (v+y)}\,dv \right\} dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(v) e^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot v}\,dv \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot y}\,dy \right). \square\end{aligned}$$

注 定理 1.5 的重要性在于 Fourier 变换把卷积运算变为乘积运算.

设 τ_h 为一平移变换, 即 $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

定理1.6 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

(i) $(\tau_h f)^\wedge(x) = e^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot h} \widehat{f}(x)$,

(ii) $(\tau_h \widehat{f})(x) = \left(e^{2\pi \mathrm{i} t\cdot h} f(t)\right)^\wedge(x)$.

证 由 Fourier 变换和平移变换的定义直接推得. □

注 (i) 表示先作平移变换, 后作 Fourier 变换的计算公式. (ii) 表示先作 Fourier 变换, 后作平移变换的计算公式.

设 δ_a 为一伸缩变换 $(a > 0)$, 即 $\delta_a f(x) = f(ax)$. 由 Fourier 变换和伸缩变换的定义直接推得.

定理1.7 $(\delta_a f)^\wedge(x) = a^{-n} \widehat{f}(\frac{x}{a})$.

例 设 $\Phi(x) = e^{-2\pi|x|}$, 则 $\widehat{\Phi}(x) = P(x)$, 其中 $P(x)$ 为 n 维 Poisson 核.

证 证明时需要用到恒等式

$$e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{t^2}{4u}}\,du,\ t \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

恒等式 (*) 可由对函数

$$\varphi(z)=\frac{1}{1+z^2}e^{\mathrm{i}tz}$$

在复平面上的以原点为中心， $R(R>1)$ 为半径的上半圆周上做围道积分并使用留数定理而得到. 于是，由 (*),

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|}e^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\pi^2\frac{|y|^2}{u}}\,du\right\}e^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}\,dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi^2\frac{|y|^2}{u}}e^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}\,dy\right\}du\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\prod_{j=1}^n\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi^2\frac{y_j^2}{u}-2\pi\mathrm{i}x_jy_j}\,dy_j\right\}du\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\prod_{j=1}^n\int_{-\infty}^\infty e^{-(\pi\frac{y_j}{\sqrt{u}}+\sqrt{u}\mathrm{i}x_j)^2-ux_j^2}\,dy_j\right\}du\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left\{\prod_{j=1}^n\left(e^{-ux_j^2}\cdot\frac{\sqrt{u}}{\pi}\sqrt{\pi}\right)\right\}du\\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty u^{\frac{n+1}{2}}e^{-u(1+|x|^2)}\,du\\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}}e^{-s}ds\\
&= P(x)\square
\end{aligned}$$

定理1.8 (Fourier 变换的反演公式) 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 若 $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi\mathrm{i}x\cdot y}\,dy,\ \text{a.e.}$$

此外， f 还是连续函数时，上式处处成立.

证 记

$$P_\varepsilon(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot y}e^{-2\pi\varepsilon|y|}dy,\quad \varepsilon>0.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P_\varepsilon(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot y}\,dy,$$

另一方面，由定理 1.2, 1.6 及 1.7 可得

$$\begin{aligned}P_\varepsilon(f)(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\left(e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot t}e^{-2\pi\varepsilon|t|}\right)^\wedge(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\tau_x\widehat{e^{-2\pi\varepsilon|\cdot|}}(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\tau_x\delta_\varepsilon\widehat{e^{-2\pi|\cdot|}}(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\tau_x\varepsilon^{-n}\widehat{e^{-2\pi|\cdot|}}(\frac{y}{\varepsilon})\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)P_\varepsilon(x-y)\,dy=(f*P_\varepsilon)(y),\end{aligned}$$

其中 P 为 Poisson 核，于是，由第四章推论 2.5, 得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P_\varepsilon(f)(x)=f(x),\quad \text{a.e.}$$

因此

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot y}\,dy,\quad \text{a.e.}\square$$

显然，若 f 还是连续函数，则上式处处成立.

§2. $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

我们知道，$L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 并无包含关系. 但 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，$1\le p\le\infty$. 故 $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 据这一事实，我们将 Fourier 变换的概念拓广到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上.

定理2.1 (Plancherel) 若 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2.$$

证 记 $g(x)=f(-x)$, 及 $\overline{f}(x)$ 为 $f(x)$ 的复共轭. 定义 $h=g*\overline{f}$. 由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}|h(x)-h(x')|&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}[f(y-x)-f(y-x')]\overline{f}(y)\,dy\right|\\&\le\|f(\cdot-x)-f(\cdot-x')\|_2\,\|f\|_2\end{aligned}$$

于是, $h\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$. 由本章定理 1.5, 有

$$\widehat{h}=\widehat{g}\cdot\widehat{\overline{f}}.$$

但 $\widehat{g}(x)=\widehat{f}(-x)$, 以及

$$\widehat{\overline{f}}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(y)}e^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}dy=\overline{\widehat{f}(-x)},$$

故 $\widehat{h}(x)=|\widehat{f}(-x)|^2\ge 0$, 以及 $\widehat{h}\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 注意到 $h\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$. 由 Fourier 变换的反演公式得

$$h(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{h}(x)\,dx$$

上式左端为 $\|f\|_2^2$, 而右端为 $\|\widehat{f}\|_2^2$. □

由定理 2.1 知道, Fourier 变换 $\mathcal{F}$ 为 $L^1\cap L^2\longrightarrow L^2$ 的有界线性算子, 其范数为 1. 于是 $\mathcal{F}$ 可以唯一地从稠子空间 $L^1\cap L^2$ 保范地延拓到全空间 L^2 上, 这个延拓后所得的算子仍记作 $\mathcal{F}$, 定义为 L^2 上的 Fourier 变换. 由 Fourier 变换的反演公式可知, $\mathcal{F}$ 为 L^2 到自身的单射 (不同的元, 其象必不同). 下面, 我们来证明 $\mathcal{F}$ 还是满射. 为此, 先证

引理2.2 设

$$A=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\quad B=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n,$$

且 $a_j < b_j$, $(1 \le j \le n)$. 如记

$$\varphi_{a,b}(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i} t}(e^{2\pi \mathrm{i} bt} - e^{2\pi \mathrm{i} at}),\ -\infty < a < b < \infty,\ t \in \mathbb{R},$$

以及

$$\varphi_{A,B}(x) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{a_j,b_j}(x_j),\quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $\varphi_{A,B} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且 $\mathcal{F}(\varphi_{A,B}) = \chi_{A,B}$, 其中

$$\chi_{A,B}(x) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{a_j,b_j}(x_j)$$

以及

$$\chi_{a_j,b_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & a_j < x_j < b_j \\ \dfrac{1}{2}, & x_j = a_j \text{ 或} x_j = b_j \\ 0, & x_j \notin [a_j, b_j] \end{cases}$$

证 只须对 $n = 1$ 的情形给出证明, 由于 $\varphi_{a,b}(t) \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, 且当 $t \to \infty$ 时,

$$\varphi_{a,b}(t) = O(\frac{1}{t}),$$

故 $\varphi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 设 $m \in \mathbb{N}$, 并记

$$\varphi_{a,b}^m(t) = \begin{cases} \varphi_{a,b}(t), & |t| < m, \\ 0, & |t| \ge m. \end{cases}$$

则

$$\varphi_{a,b}^m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

且

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{a,b}^m \overset{L^2}{=} \varphi_{a,b}.$$

由 L^2-Fourier 变换的定义

$$\mathcal{F}(\varphi_{a,b}) = L^2 - \lim_{m\to\infty} \mathcal{F}(\varphi_{a,b}^m).$$

但逐点地有

$$\lim_{m\to\infty}\mathcal{F}(\varphi_{a,b}^m)(s)=\lim_{m\to\infty}\int_{-m}^{m}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}bt}-e^{2\pi\mathrm{i}at}}{2\pi\mathrm{i}t}e^{-2\pi\mathrm{i}st}\,dt$$
$$=\lim_{m\to\infty}\int_0^m\frac{\sin 2\pi(b-s)t-\sin 2\pi(a-s)t}{\pi t}\,dt=\chi_{a,b}(s),$$

因此 $\mathcal{F}(\varphi_{a,b})=\chi_{a,b}$. □

定理2.3 $\mathcal{F}$ 为 L^2 到自身的满射.

证 引理 2.2 中函数 $\chi_{A,B}$ 生成的线性流形在 L^2 中稠密，且每一个 $\chi_{A,B}$ 都是 $\mathcal{F}$ 的象，故只须证明： L^2 在 $\mathcal{F}$ 作用下的象是 L^2 的闭集. 但后者是显然的. 事实上， $\mathcal{F}$ 作为 L^2 上的有界线性算子，保持范数为 1. □

由以上可知： $\mathcal{F}$ 是 L^2 到自身的等距同构映射. 我们把 $\mathcal{F}$ 的逆映射记作 $\mathcal{F}^{-1}$, 它也是 L^2 上范数为 1 的有界线性算子.

定理2.4 (Plancherel) 设 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x)=(\mathcal{F}f)(-x).$$

证 先设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. 记

$$h(x)=(\mathcal{F}f)(-x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)e^{2\pi\mathrm{i}x\cdot y}dy.$$

任取 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. 作内积 (g,h):

$$(g,h)=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\overline{h(x)}\,dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\left[\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(y)}e^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}dy\right]dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(y)}\widehat{g}(y)\,dy=(\widehat{g},f).$$

记 $h^*=\mathcal{F}^{-1}(f)$, 则 $f=\widehat{h^*}$. 于是

$$(g,h)=(\widehat{g},\widehat{h^*})$$

但 $\mathcal{F}$ 为 L^2 到自身的等距同构映射，故有

$$(\widehat{g},\widehat{h^*})=(g,h^*)$$

由此得到

$$(g,h)=(g,h^*),\quad \forall\, g\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$$

由 $L^1\cap L^2$ 在 L^2 中稠密的事实，可知上式对一切 $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 成立. 由此推出 $h^*=h$, 即

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x)=(\mathcal{F}f)(-x),\quad f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

再一次使用 $L^1\cap L^2$ 在 L^2 中的稠密性，可知上式对任一 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 成立.

我们既然有了 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换的概念，自然可以进一步将 Fourier 变换的概念拓广到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上， $1<p<2$. 这个想法的依据是：当 $1<p<2$ 时，

$$L^p(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)+L^2(\mathbb{R}^n),$$

意即对任一 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<2$, 必存在 f 的分解 $f=f_1+f_2$, 使得 $f_1\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 以及 $f_2\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 事实上，取

$$f_1(x)=f(x)\chi_{\{|f(x)|\geq 1\}}(x)$$
$$f_2(x)=f(x)\chi_{\{|f(x)|<1\}}(x)$$

即可. 于是，自然定义

$$\mathcal{F}f=\mathcal{F}f_1+\mathcal{F}f_2.$$

利用这个定义，容易将本章的定理 1.5 和 1.2 分别拓广为下面两个定理.

定理2.5 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le 2$, 若 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\mathcal{F}(f*g)(x)=\mathcal{F}(f)(x)\cdot\mathcal{F}(g)(x).$$

定理2.6 设 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(x)\,dx.$$

最后，我们利用算子插值的 Riesz-Thörin 定理来建立一个关于 Fourier 变换的很有用的不等式.

定理2.7 (Hausdorff-Young 不等式) 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le 2$ 则 $\widehat{f}\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|\widehat{f}\|_{p'}\le\|f\|_p$$

证 由本章定理 1.1(1), $\mathcal{F}$ 为 $(1,\infty)$ 型的，且

$$\|\widehat{f}\|_\infty\le\|f\|_1.$$

又由本章定理 2.1 及 L^2-Fourier 变换的定义，$\mathcal{F}$ 为 (2,2) 型的，且

$$\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$$

取

$$(p_0,q_0)=(1,\infty),\quad (p_1,q_1)=(2,2),\quad (p_t,q_t)=(p,p')$$

使用 Riesz-Thörin 定理时，便得

$$\|\widehat{f}\|_{p'}\le\|f\|_p.\square$$

§3. 对 Fourier 积分的一个应用

对于 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 我们把形式积分

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi i x\cdot y}\,dy \tag{1}$$

叫做 f 的 Fourier 积分，由 Fourier 变换的反演公式 (定理 1.8) 可知：当 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 时，上述 f 的 Fourier 积分存在，且

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot y}\,dy=f(x)\quad \text{a.e.}$$

然而，在一般情况下，$\widehat{f}\notin L^1(\mathbb{R}^n)$. 此时，$f$ 的 Fourier 积分是一个发散的积分. 在这种情况下，如何通过 $\widehat{f}$ 来表达 f 成为一个很有意义的问题. 我们可以用一个依赖于参数 $\varepsilon>0$ 的具有某种好的性质的函数 $\Phi(x;\varepsilon)$ 乘到 (1) 的积分号内，作成 Lebesgue 积分

$$\Phi_\varepsilon(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot y}\Phi(\varepsilon y)\,dy. \tag{2}$$

然后令 $\varepsilon\to 0_+$, 考虑在一定尺度下，极限是否等于 f. 这种办法通常叫做 Fourier 积分的求和. 能够做到这一点是同 Φ 的性质密切相关的. 记 $\widehat{\Phi}=\varphi$, 我们可以将 (2) 式通过 Fourier 变换的性质改写成

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(f)(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(y)e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot y}\Phi(\varepsilon y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\mathcal{F}\big(e^{2\pi \mathrm{i}x\cdot u}\Phi(\varepsilon u)\big)(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\tau_x\mathcal{F}\big(\Phi(\varepsilon\,\cdot\,)\big)(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\tau_x\mathcal{F}\left(\delta_\varepsilon\Phi(\,\cdot\,)\right)(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\varepsilon^{-n}\varphi\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big)\,dy\\&=(f*\varphi_\varepsilon)(x),\end{aligned} \tag{3}$$

其中，我们先后用到了定理 1.2, 1.6 和 1.7. 于是积分 (2) 是否 (在一定尺度下) 收敛于 f 的问题被转化为卷积算子序列收敛或恒等逼近算子的问题. 因此，根据第四章定理 2.1($p=1$) 和定理 2.4 ($p=1$), 便直接推得

定理3.1 设 $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\Phi} = \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\Phi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1.$$

那么

(a) 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\Phi_\varepsilon(f) - f\|_1 = 0.$$

(b) 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且对某一 $\lambda > 0$,

$$\varphi(x) = O\big((1 + |x|)^{-n-\lambda}\big),$$

则

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \Phi_\varepsilon(f)(x) = f(x) \quad \text{a.e.}\square$$

如果 $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么利用 L^2-Fourier 变换的理论可以将定理 3.1 作进一步的推广. 为此, 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. 因此, 有 f 的分解

$$f = f_1 + f_2$$

其中, $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 由 (3) 式得

$$\Phi_\varepsilon(f_1)(x) = (f_1 * \varphi_\varepsilon)(x).$$

其次, 由 Plancherel 定理可知 $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 注意到定理 1.6 和 1.7 对 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 也是成立的. 于是, 如使用定理 1.6, 1.7 和 2.6 并依类似于 (3) 式的证法, 同样有

$$\Phi_\varepsilon(f_2)(x) = (f_2 * \varphi_\varepsilon)(x).$$

因此, 得到

$$\Phi_\varepsilon(f)(x) = (f * \varphi_\varepsilon)(x).$$

于是得到

定理3.2 设 $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$. 如果

$$\widehat{\Phi} = \varphi \in L(\mathbb{R}^n) \quad 且 \ \Phi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$$

那么

(a) 对于 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\Phi_\varepsilon(f) - f\|_p = 0$$

(b) 对于 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 若对于某 $\lambda > 0$

$$\varphi(x) = O\big((1 + |x|)^{-n-\lambda}\big),$$

则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon(f)(x) = f(x), \quad \text{a.e.}\square$$

习　题

1. 设 $f(t) = \chi_{(a,b)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. 证明 $\widehat{f} \notin L(\mathbb{R})$.
2. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 证明

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f(x)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f(x)) = f(x) \quad \text{a.e.}$$

3. 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明：若 $\widehat{f} = \widehat{g}$, 则

$$f = g \quad \text{a.e.}$$

4. 证明：若 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则

$$(f \cdot g)^\wedge = \widehat{f} * \widehat{g}$$

5. 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}) = f * g$$

6. 设 $\Phi(x) = e^{-2\pi|x|}$. 试证 Φ 满足定理 3.2 的条件.

参考书目

1. Ash, R. B., Measure, Integration and Functional Analysis, Academic Press, New York, 1972.
2. Cohn, D. L., Measure Theory, Birkhäuser, Boston, 1980.
3. Folland, G. B., Real Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.
4. Guzman, M. de., Real Variable Method in Fourier Analysis, North-Holland Publishing Company, 1981.
5. Hewitt,E. & Strömberg, K., Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, 1978.
6. Royden, H. L., Real Analysis (2nd ed.) The Mac Millan Co., New York, 1968.
7. Rudin, W., Real and Complex Analysis (2nd ed.), McGraw-Hill, 1974.
8. Segal, I. E., & Kunze, H. A., Integrals and Operators, McGraw-Hill, New York, 1968.
9. Wheeden, R. L. & Zydmund, A., Measure and Integral, Monographs and textbooks in pure and applied math., Vol. 43, New York, 1977.
10. 江泽涵：拓扑学引论，上海科学技术出版社， 1978.
11. 方嘉琳：点集拓扑学，辽宁人民出版社， 1983.
12. 柳藩 钱佩玲：实变函数论与泛函分析，北京师范大学出版社，1987.
13. 孙永生：泛函分析讲义，北京师范大学出版社， 1986.
14. 张禾瑞：近世代数基础，人民教育出版社， 1978.

名词 人名 符号索引

(以汉语拼音字母顺序排列)

例： (1.1.3) 表示“第 1 篇，第 1 章，第 3 节”